

ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ (೨೦೦೫-೦೬ ಮತ್ತು ೨೦೦೬-೦೭ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)
New Scheme (For Students studied during the Years 2005-06 & 2006-07)

Code No. **35-NS**

Total No. of Questions : 38]

[Total No. of Printed Pages : 15

March / April, 2007

MATHEMATICS

(Kannada and English Versions)

(**New Syllabus**)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 90

(Kannada Version)

- ಸೂಚನೆ: i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C** ಮತ್ತು **D** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1. $5x \equiv 4 \pmod{13}$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ x ನ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\begin{bmatrix} 6 & x-2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ ಮಾತೃಕೆಯು ಅವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಣೀಯವಾದರೆ (Singular), x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

3. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ Z ಮೇಲೆ $a \circ b = a + b + 1, \forall a, b \in Z$ ನಿಂದ "0" ನಿರೂಪಿತವಾದರೆ ತತ್ಸಮಕ ಅವಯವ (Identity element) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ಮತ್ತು $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ ಆದರೆ, $\vec{a} + \vec{b}$ ಯ ಪರಿಮಾಣ (Magnitude) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಬಿಂದು ವೃತ್ತ (Point circle) ವಾಗಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ನಿಬಂಧನೆ (g, f ಮತ್ತು c ಗಳಲ್ಲಿ) ಏನು ?

6. $y^2 = -8x$ ಪರವಲಯದ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖೆ (Directrix) ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\sin \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right]$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{2-i}{5i}$ ನ ಮಾಪಾಂಕ (Modulus) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ಆದರೆ, $f'(1)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx.$

ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. $a \equiv b \pmod{m}$ ಆಗಿದ್ದು, $n > 1, m$ ನ ಒಂದು ಧನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, $a \equiv b \pmod{n}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$

13. ಶೂನ್ಯ ಗಣವಲ್ಲದ ಗಣ S ನ ಮೇಲಿನ “ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆ”ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ Z ಮೇಲೆ * ಕ್ರಿಯೆಯು $a * b = a^b$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. * ದ್ವಿಮಾನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಿ.

14. $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ಮತ್ತು $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ ಸದಿಶಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. (1, 5) ಬಿಂದುವು $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿದೆಯೆ, ಒಳಗಿದೆಯೆ ಅಥವಾ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇದೆಯೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ (Ellipse) ದ ಪ್ರಧಾನ ಅಕ್ಷದ ಎರಡು ತುದಿಗಳು (5, 0) ಮತ್ತು (- 5, 0) ಆಗಿವೆ. $3x - 5y - 9 = 0$ ಒಂದು ನಾಭಿ ಜ್ಯಾ (Focal chord) ಆಗಿದ್ದರೆ, ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (Eccentricity) ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಸಾಧಿಸಿ : $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$.

18. $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ಮತ್ತು $y = \cos \beta + i \sin \beta$ ಆದರೆ,

$$\frac{y^3}{x^2} + \frac{x^2}{y^3} = 2 \cos (3\beta - 2\alpha)$$
 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $x^y = a^x$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = \frac{x \log a - y}{x \log x}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

20. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ (1, $\sqrt{3}$) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಉಪಸ್ಪರ್ಶಕದ (Subtangent) ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

21. $\sin 3x \cos x$ ಅನ್ನು x ಕುರಿತಂತೆ ಸಮಾಕಲನ (Integrate) ಮಾಡಿ.

22. ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮತಲದ ಮೂಲಬಿಂದು (Origin) ವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೂಹದ ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣ (Differential equation) ವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ.

ವಿಭಾಗ - C

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. 408 ಮತ್ತು 1032 ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. (G.C.D.) ವನ್ನು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದನ್ನು m, n ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ $408m + 1032n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ. 5

$$24. a) \begin{bmatrix} x & 2 & -3 \\ 5 & y & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಕ್ರೇಮರ್‌ನ ನಿಯಮದಿಂದ (Cramer's rule) ಬಿಡಿಸಿ :

$$2x - y = 10$$

$$x - 2y = 2. \quad 2$$

25. a) H ಶೂನ್ಯ ಗಣವಾಗಿಲ್ಲ ಮತ್ತು G ಯ ಉಪಗಣವಾಗಿದೆ. $(G, *)$ ಒಂದು ಸಮುದಾಯ (Group) ವಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ $a, b \in H$ ಗಳಿಗೆ $a * b^{-1} \in H$ ಆದರೆ, $(H, *)$ ವು $(G, *)$ ನ ಉಪಸಮುದಾಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b) ಸಮುದಾಯ G ಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ (Element) ವೂ ತನ್ನದೇ ವಿಲೋಮವಾಗಿದ್ದರೆ G ಯು ಒಂದು ಅಬೀಲಿಯನ್ (Abelian) ಸಮುದಾಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

26. a) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು (Vertices) $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ ಮತ್ತು $(1, 2, -4)$ ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿ (Vector method) ಯಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ಮತ್ತು $\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$ ಗಳು ಏಕಶೃಂಗ ಸಂಪಾತ ಅಂಚು (Co-terminal) ಗಳಾಗಿರುವ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಘನದ (Parallelopiped) ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 5 = 10$

27. a) $(2, 3)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಕೇಂದ್ರವನ್ನು $x + y = 4$ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0$ ವೃತ್ತಗಳ ಮೂಲಾಕ್ಷ ಕೇಂದ್ರ (Radical centre) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a) ಅತಿಪರವಲಯ (Hyperbola) $x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$ ಯ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ (Eccentricity) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಒಂದು ಪರವಲಯದ ಶೃಂಗವು (Vertex) $(-4, 2)$ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷವು (Axis) $y = 2$ ಆಗಿದ್ದು, ಅದು $(0, 6)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದರೆ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

[Turn over

29. a) $x \geq 0$ ಮತ್ತು $y \geq 0$ ಆದಾಗ,

$$\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1} (x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2})$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3

b) $\cos x - \cos 7x = \sin 4x$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರ (General

solution) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

3 × 5 = 15

30. a) e^x ಅನ್ನು x ಕುರಿತಂತೆ ಪ್ರಥಮ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವಕಲಿಸಿ.

3

b) $\log_{10} (\log x)$ ಅನ್ನು x ಕುರಿತಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ.

2

31. a) $y = x \cosh x$ ಆದರೆ,

$$xy_2 - 2y_1 - xy + 2 \cosh x = 0 \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.}$$

3

b) x^x ಉತ್ಪನ್ನ (Function) ವು $x = \frac{1}{e}$ ಆದಾಗ, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ (Minimum)

ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2

32. a) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $\int \frac{x+1}{x^2-4x+6} dx$.

3

b) ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು x ಅಡಿ ಎತ್ತರವನ್ನು

t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಿದ್ದು $x = 80t - 16t^2$ ಆಗಿದೆ. ಕಲ್ಲು ಗರಿಷ್ಠ ಎತ್ತರವನ್ನು

ಎಷ್ಟು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ?

2

33. a) $x = a (\theta + \sin \theta)$ ಮತ್ತು $y = a (1 - \cos \theta)$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx}$ ಮತ್ತು

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ 2

34. $4y^2 = 9x$ ಮತ್ತು $3x^2 = 16y$ ವಕ್ರಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ (Bounded) ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : $2 \times 10 = 20$

35. a) ದೀರ್ಘವೃತ್ತ (Ellipse) ವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದು ಪಥ (Locus) ವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ. 6

b) ಕೇಲಿ-ಹ್ಯಾಮಿಲ್ಟನ್ (Caley-Hamilton) ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ಮಾತೃಕೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

36. a) ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ $\sqrt{3} + i$ ನ ಎಲ್ಲಾ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ (Product) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b) ಸದಿಶ ಪದ್ಧತಿ (Vector method) ಯಿಂದ, “ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದು ವ್ಯಾಪಿಯಾಗಿವೆ” ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

[Turn over

37. a) 6 ಅಡಿ ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 20 ಅಡಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬೆಳಕಿನ ಮೂಲದಿಂದ 4 ಮೈಲು/ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ದೂರ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅವನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ? ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ನೆರಳಿನ ತುದಿಯು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ ? 6

b) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರವನ್ನು (General solution) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a) ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ 6

b) ಅವಕಲ ಸಮೀಕರಣ (Differential equation) $y \log x \cdot \log y \, dx + dy = 0$ ಯ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪರಿಹಾರ (General solution) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

(English Version)

- Instructions :* i) The question paper has *four Parts – A, B, C and D.* Answer all the parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks and **Part – D** carries 20 marks.

PART – A

Answer *all the ten* questions :

10 × 1 = 10

1. Find an integer x , satisfying $5x \equiv 4 \pmod{13}$.
2. If the matrix $\begin{bmatrix} 6 & x-2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ is singular, find x .
3. On the set Z of integers if " \circ " is defined by $a \circ b = a + b + 1, \forall a, b \in Z$, find the identity element.
4. If $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, find the magnitude of $\vec{a} + \vec{b}$.
5. Write the condition (in terms of g, f and c) under which $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ becomes a point circle.
6. Find the equation of the directrix of the parabola $y^2 = -8x$.
7. Find the value of $\sin \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right]$.

[Turn over

8. Find the modulus of the complex number $\frac{2-i}{5i}$.

9. If $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, find $f'(1)$.

10. Evaluate $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x \, dx$.

PART - B

Answer any *ten* questions :

10 × 2 = 20

11. If $a \equiv b \pmod{m}$ and $n > 1$ is a positive divisor of m , prove that

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

12. Evaluate

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$$

13. Define the binary operation, on a non-empty set S . Give an example to

show that, on Z , the operation $*$, defined by $a * b = a^b$, is not binary.

14. Find the angle between the vectors $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$.

15. Examine whether the point $(1, 5)$ lies outside, inside or on the circle

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0.$$

16. The two ends of the major axis of an ellipse are (5, 0) and (- 5, 0). If $3x - 5y - 9 = 0$ is a focal chord, find the eccentricity of the ellipse.

17. Prove that $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$.

18. If $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ and

$$y = \cos \beta + i \sin \beta$$

prove that $\frac{y^3}{x^2} + \frac{x^2}{y^3} = 2 \cos (3\beta - 2\alpha)$.

19. If $x^y = a^x$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{x \log a - y}{x \log x}$.

20. Find the length of the subtangent to the curve $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ at the point (1, $\sqrt{3}$) on it.

21. Integrate $\sin 3x \cos x$ with respect to x .

22. Form the differential equation of the family of straight lines passing through the origin of Cartesian plane.

PART - C

I. Answer any *three* questions :

3 × 5 = 15

23. Find the G.C.D. of 408 and 1032 using Euclidean algorithm. Express it in two ways in the form $408m + 1032n$ where m, n are integers. 5

[Turn over

24. a) Find x and y if

$$\begin{bmatrix} x & 2 & -3 \\ 5 & y & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 19 & -5 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad 3$$

b) Solve by Cramer's rule :

$$2x - y = 10$$

$$x - 2y = 2. \quad 2$$

25. a) Given that H is a non-empty subset of a set G and $(G, *)$ is a group. If for all $a, b \in H$, $a * b^{-1} \in H$, prove that $(H, *)$ is a subgroup of $(G, *)$. 3

b) If, in a group G , every element is its own inverse, prove that G is an Abelian group. 2

26. a) Using vector method, find the area of the triangle whose vertices are $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ and $(1, 2, -4)$. 3

b) Find the volume of the parallelepiped whose co-terminal edges are $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$. 2

II. Answer any *two* questions : 2 × 5 = 10

27. a) Find the equation of the circle which passes through the point $(2, 3)$, has its centre on $x + y = 4$ and cuts orthogonally the circle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$. 3

b) Find the radical centre of the circles $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$ and $x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0$. 2

28. a) Find the centre and the eccentricity of the hyperbola

$$x^2 - 3y^2 - 4x - 6y - 11 = 0. \quad 3$$

- b) Find the equation of the parabola with vertex $(-4, 2)$, axis $y = 2$ and passing through the point $(0, 6)$. 2

29. a) If $x \geq 0$ and $y \geq 0$, prove that

$$\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1} (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) . \quad 3$$

- b) Find the general solution of the equation

$$\cos x - \cos 7x = \sin 4x . \quad 2$$

III. Answer any *three* of the following questions :

$3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate e^x with respect to x from first principles. 3

- b) Differentiate $\log_{10} (\log x)$ with respect to x . 2

31. a) If $y = x \cosh x$, prove that

$$xy_2 - 2y_1 - xy + 2 \cosh x = 0. \quad 3$$

- b) Prove that x^x function has a minimum value at $x = \frac{1}{e}$. 2

[Turn over

32. a) Find $\int \frac{x+1}{x^2-4x+6} dx$. 3

b) A stone is thrown up vertically and the height x feet reached by it in time " t " seconds is given by $x = 80t - 16t^2$. Find the time for the stone to reach its maximum height. Also find the maximum height reached by the stone. 2

33. a) If $x = a(\theta + \sin \theta)$ and $y = a(1 - \cos \theta)$, find $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$. 3

b) Find $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ 2

34. Find the area bounded by the curves $4y^2 = 9x$ and $3x^2 = 16y$. 5

PART - D

Answer any *two* of the following questions :

$2 \times 10 = 20$

35. a) Define ellipse as the locus of a point. Derive the equation of the ellipse in the form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b). \quad 6$$

b) Using Caley-Hamilton theorem, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. 4

36. a) Find all the cube roots of the complex number $\sqrt{3} + i$. Represent them in the Argand diagram. Find their product. 6

b) Prove by vector method that the medians of a triangle are concurrent. 4

37. a) A man 6 feet tall moves away from a source of light 20 feet above the ground level and his rate of walking being 4 miles/hour. At what rate, is the length of the shadow changing ? At what rate is the tip of the shadow moving ? 6

b) Find the general solution of

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2} . \quad 4$$

38. a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ 6

b) Find the general solution of the differential equation

$$y \log x \cdot \log y \, dx + dy = 0. \quad 4$$

=====