

(8 pages)

MAY 2012

U/ID 4707/PAG

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. If $f'(z_0)$ exists, then prove that $f(z)$ is continuous at z_0 .

$f'(z_0)$ இருக்குமானால், z_0 புள்ளியில் $f(z)$ தொடர்ச்சியுடையது என நிறுவுக.

2. Prove that the function $u = \cos x \cosh y$ is harmonic.

$u = \cos x \cosh y$ என்பது ஒரு இசைச்சார்பு என நிறுவுக.

3. Find the image of the points exterior to $|z|=1$ under $w = \frac{1}{z}$.

$|z|=1$ ன் வெளிப்புற புள்ளிகளின் $w = \frac{1}{z}$ ன் கீழ்

உருமாற்றம் பெறும் பிம்பம் யாது?

4. Find out the image of entire z plane under $w = z^2$.

$w = z^2$ எனும் உருமாற்றம் z தளத்தை எவ்விதமாக மாற்றம் செய்யும்?

5. Evaluate $\int_C \frac{1}{z-3} dz$ where C is given by $|z-3|=r$.

கணக்கிடுக : $\int_C \frac{1}{z-3} dz$ இங்கு C $|z-3|=r$ எனும் வட்டத்தை C குறிக்கும்.

6. State the Liouville's theorem.

லியோவில்லின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

7. Find the poles of $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$.

$f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$ ன் இசைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

8. Find out the zeroes of the function $f(z) = z^2 + z + 1$.

$f(z) = z^2 + z + 1$ ன் பூச்சியங்களைக் காண்க.

9. Find the residue of $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ at $z=1$.

$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ ன் எச்சத்தை $z=1$ புள்ளியில் காண்க.

10. Find the residue of $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ at infinity.

$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ ன் எச்சத்தை $z = \infty$ புள்ளியில் காண்க.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Prove that the $f(z)=|z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin.
- (b) Prove that the function $u(x,y)=e^x \cos y$ is harmonic. Find its harmonic conjugate v and the analytic function $f=u+iv$.

(அ) $f(z)=|z|^2$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானது எனவும் ஆனால் $z=0$ புள்ளியைத் தவிர்த்து மற்ற புள்ளிகளில் $f(z)$ வகையிடத்தக்கது அல்ல எனவும் நிறுவுக.

(ஆ) $u(x,y)=e^x \cos y$ ஒரு இசைச்சார்பு எனவும் அதன் துணையியச் சார்பு v ஐக் கண்டு, $f=u+iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பினையும் காண்க.

Or

3

U/ID 4707/PAG

(c) Derive the Cauchy-Riemann equations in polar form.

(d) Find the analytic function $f=u+iv$ where $u=e^{-x} \{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}$.

(இ) கோஷி-ரீமான் சமன்பாடுகளை கோண தூரக் கூறுகளில் காண்க.

(ஈ) $u=e^{-x} \{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}$ எனுமாறு $f=u+iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பினைக் காண்க.

12. (a) Prove that the transformation $w=(1+i)z+(2-i)$ maps the rectangular region $x=0, y=0, x=1, y=2$ in the z -plane onto the rectangular region in the w -plane.

(b) Prove that $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$ transforms circles into circles.

(அ) $w=(1+i)z+(2-i)$ என்ற உருமாற்றமானது z -தளத்திலுள்ள $x=0, y=0, x=1, y=2$ என்ற செவ்வகப்பகுதியை w -தளத்தில் செவ்வகப்பகுதிக்கு உருமாற்றம் செய்யும் என நிறுவுக.

(ஆ) இருமாறி நேரியல் உருமாற்றம் $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, $c \neq 0$, ஆனது வட்டங்களை, வட்டங்களாக உருமாற்றம் செய்யும் என நிறுவுக.

Or

4

U/ID 4707/PAG

[P.T.O.]

(c) Find the linear fractional transformation that maps $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1$ onto $w_1 = i$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$ respectively.

(d) Discuss the transformation $w = z^2$.

(இ) $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1$ ஆகியனவற்றை முறையே $w_1 = i$, $w_2 = \infty$ மற்றும் $w_3 = 1$ உருமாற்றம் செய்யும் நேரியல் விகித உருமாற்றத்திலும் காண்க.

(ஈ) $w = z^2$ எனும் உருமாற்றத்தை விவரிக்க.

13. (a) Evaluate $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz$, $t > 0$ where C is the circle $|z| = 3$, using Cauchy's integral formula.

(b) Expand $\cos z$ about $z = \pi/2$.

(அ) கோஷியின் தொகைக்கான வாய்ப்பாட்டினை பயன்படுத்தி, $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz$, $t > 0$ கணக்கிடுக. இங்கு C என்பது $|z| = 3$ எனக் கொள்க.

(ஆ) $z = \pi/2$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து $\cos z$ ன் விரிவினைக் காண்க.

Or

(c) If a function f is analytic at a point, then prove that its derivatives of all orders are also analytic functions at that point.

(இ) ஒரு புள்ளியில் f ஆனது பகுமுறை சார்பாக இருந்தால், அப்புள்ளியில், f ன் அனைத்து வரிசை வகையீடுகளும் பகுமுறைச் சார்பாக இருக்கும் என நிறுவுக.

14. (a) Discuss the nature of singularities of

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

(b) State and prove the argument principle.

(அ) $f(z) = \frac{z-2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ ன் சிறப்புப் புள்ளிகளை ஆராய்க.

(ஆ) சார்பின் மாறி-கோட்பாடு-தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

Or

(c) State and prove Rouché's theorem.

(d) State and prove the fundamental theorem of algebra.

- (இ) ரௌஸின் (Rouche's) தேற்றத்தைக் கூறி, அதனை நிறுவுக.
- (ஈ) இயற்கணிதத்தில் அடிப்படைத் தேற்றத்தைக் கூறி, அதனை நிறுவுக.

15. (a) Find the residue of $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$.

(b) Prove that

$$\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta} \{\cos(n\theta + \sin\theta)\} d\theta = \frac{2\pi}{\lfloor n \rfloor} (-1)^n.$$

(அ) $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ ன் எச்சத்தைக் கணக்கிடுக.

(ஆ) நிறுவுக : $\int_0^{2\pi} e^{-\cos\theta} \{\cos(n\theta + \sin\theta)\} d\theta = \frac{2\pi}{\lfloor n \rfloor} (-1)^n.$

Or

(c) Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$

(d) Apply the calculus of residue to prove that

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(இ) கணக்கிடுக : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$.

(ஈ) எச்சத்திற்கான வகை நுண் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$
