

(6 pages)

OCTOBER 2011

U/ID 4707/PAG

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Evaluate $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$.

மதிப்பிடுக : $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$.

2. Using rules of differentiation, find the derivative of $\cos^2(2z + 3i)$.

வகையீட்டு விதிகளைப் பயன்படுத்தி $\cos^2(2z + 3i)$ -ன் வகையீட்டைக் காண்க.

3. Find the image of a circle through the origin under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

$w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தின் மூலம் ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் பிம்பத்தைக் காண்க.

4. Define a conformal mapping.

ஒரு இணங்கும் தன்மையுடைய கோர்த்தலை வரையறு.

5. Evaluate $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ where C is the circle $|z|=1$.

C என்பது $|z|=1$ என்றவட்டம் எனில் $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

6. State maximum modulus principle.

பெரும தகம கோட்பாட்டினை எழுதுக.

7. Find the zeros of $f(z) = \sin z$.

$f(z) = \sin z$ என்பதன் பூஜ்ஜியங்களைக் காண்க.

8. Define an isolated singularity for $f(z)$.

$f(z)$ -ன் தனித்த வழமத்தை வரையறு.

9. State Jordan's lemma.

ஜோர்டானின் துணைத் தேற்றத்தை எழுதுக.

10. Find the residue of $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$.

$f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$ என்பதன் எச்சத்தைக் காண்க.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) State and prove the chain rule for differentiating composite functions.
- (b) Derive Cauchy-Riemann equations in Cartesian form.
- (அ) இணைந்த சார்புகளை வகையிடுவதற்கான சங்கிலி விதியை எழுதி நிறுவுக.
- (ஆ) கோஷி-ரீமென் சமன்பாடுகளை கார்டீசியன் ஆயக்கூறுகளில் தருவிக்க.

Or

- (c) If $f(z) = u + iv$ and $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$, find $f(z)$ in terms of z .
- (d) Show that $u(x, y) = \sinh x \sin y$ is harmonic and determine its harmonic conjugate.
- (இ) $f(z) = u + iv$ மற்றும் $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ எனில் z -ல் $f(z)$ -யைக் காண்க.
- (ஈ) $u(x, y) = \sinh x \sin y$ என்பது இசைச் சார்பு என்று நிறுவி அதன் இசை இணையினைக் காண்க.

12. (a) If $f(z)$ is analytic in a region D and if $f'(z) \neq 0$ in D , then prove that the mapping $w = f(z)$ is conformal in D .

(b) Discuss the transformation $w = \sqrt{z}$.

(அ) D என்ற பகுதியில் $f(z)$ என்பது வகைமுறைச் சார்பாக உள்ளது மற்றும் D -யில் $f'(z) \neq 0$ எனில் $w = f(z)$ என்ற கோர்த்தல் இணங்கும் தன்மையுடையதாக D -ல் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

(ஆ) $w = \sqrt{z}$ என்ற உருமாற்றத்தைப் பற்றி எழுதுக.

Or

(c) Find the linear fractional transformation that maps the points $z_1 = -i, z_2 = 0$ and $z_3 = i$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = 1$.

(d) Discuss the transformation $w = \cos z$.

(இ) $z_1 = -i, z_2 = 0$ மற்றும் $z_3 = i$ என்ற புள்ளிகளை $w_1 = 1, w_2 = i$ மற்றும் $w_3 = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கு கோர்த்துச் செல்லும் நேரியல் பின்ன உருமாற்றத்தைக் காண்க.

(ஈ) $w = \cos z$ என்ற உருமாற்றத்தைப் பற்றி எழுதுக.

13. (a) State and prove the Cauchy-Goursat theorem.

(அ) கோஷி-கோர்ஸெட் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

Or

(b) State and prove Morera's theorem.

(c) Expand $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ in a Laurent's series if $|z| > 3$.

(ஆ) மொரிராவின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(இ) $|z| > 3$ எனில் $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ -யை லாரண்ட் தொடராக விவரிக்கவும்.

14. (a) Determine and classify the singular points of

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

(b) State and prove Cauchy's residue theorem.

(அ) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ என்பதன் வழமப் புள்ளிகளைக் கண்டு வகைப்படுத்துக.

(ஆ) கோஷியின் எச்சத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

Or

(c) Find the residue of $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$ at its poles.

(d) State and prove Rouché's theorem.

(இ) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}$ என்பதன் எச்சத்தை அதன் துருவப் புள்ளிகளில் காண்க.

(ஈ) ரோச்சின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

15. (a) Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta$.

மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta$.

Or

(b) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$ (a is real and $a > 0$).

மதிப்பிடுக $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^3}$ (a என்பது மெய்யெண் மற்றும் $a > 0$)