

(7 pages)

MAY 2011

U/ID 4707/PAG

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. If $P(z)$ is a polynomial, find $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z)$.

$P(z)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்பான் எனில் $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z)$ -யைக் காண்க.

2. Write Cauchy-Riemann equations in polar form.

கோஷி-ரீமேன் சமன்பாடுகளைக் கோணதூரக் கூறுகளில் எழுதுக.

3. Define a conformal mapping.

ஒரு இணங்கும் கோர்த்தலை வரையறு.

4. Define a bilinear transformation.

ஒரு இருமாறி நேரியல் உருமாற்றத்தை வரையறு.

5. Evaluate the integral $\int_C \bar{z} dz$ where C is the upper half of the circle $|z| = 1$.

C என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டத்தின் மேல் பாதி எனில் $\int_C \bar{z} dz$ என்ற தொகையின் மதிப்பு யாது?

6. State Cauchy's inequality.

கோஷியின் சமனின்மையை எழுதுக.

7. Find a zero of the function $f(z) = \sin z$.

$f(z) = \sin z$ என்ற சார்பின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

8. Find the residue of $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$.

$f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$ என்பதன் எச்சத்தைக் காண்க.

9. Find the residue of $\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at infinity.

$\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ என்பதன் எச்சத்தை முடிவிலியில் காண்க.

10. State Jordan's inequality.

ஜோர்டனின் சமனின்மையை எழுதுக.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Examine whether the function $f(z) = |z|^2$ is differentiable or not.

(b) If $u = y^3 - 3x^2y$, find an analytic function $f(z)$ such that $f(z) = u + iv$.

(அ) $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பு வகைமையானதா இல்லையா என ஆராங்க.

(ஆ) $u = y^3 - 3x^2y$ எனில் $f(z) = u + iv$ எனுமாறு ஒரு வகைமுறைச் சார்பு $f(z)$ -யைக் காண்க.

Or

(c) Derive Cauchy-Riemann conditions in Cartesian form.

(d) Prove that the function $u = e^x \cos y$ is harmonic and find a harmonic conjugate.

(இ) கோஷி-ரீமேன் நிபந்தனைகளை தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகள் வடிவில் தருவிக்க.

(ஈ) $u = e^x \cos y$ என்ற சார்பு இசைச் சார்பு என்று நிரூபித்து அதன் ஒரு இசை இணையியைக் காண்க.

12. (a) Prove that under a bilinear transformation circles and lines are transformed into circles and lines.

(b) Discuss the transformation $w = \sin z$.

(அ) ஒரு இருமாறி நேரியல் உருமாற்றத்தின் கீழ் வட்டங்கள் மற்றும் கோடுகள், வட்டங்கள் மற்றும் கோடுகளுக்கு உருமாறும் என்று நிறுவுக.

(ஆ) $w = \sin z$ என்ற உருமாற்றத்தை விவாதி.

Or

(c) Show that a conformal mapping maps orthogonal curves onto orthogonal curves.

(d) Discuss the transformation $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

(இ) ஒரு இணங்கும் கோர்த்தல் செங்குத்தான வளைவரைகளை செங்குத்தான வளைவரைகள் மேல் கோர்த்துச் செல்லும் என்று நிறுவுக.

(ஈ) $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ என்ற உருமாற்றத்தை விவாதி.

13. (a) State and prove the Cauchy-Goursat theorem.

(அ) கோஷி-கோர்சாட் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

Or

(b) State and prove maximum modulus theorem.

(c) Using Cauchy's integral formula evaluate

$$\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}$$

where C is the circle $|z| = 2$ taken in the positive sense.

(ஆ) உச்ச மட்டளவு தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(இ) கோஷியின் தொகையீட்டு வாய்ப்பாட்டைப்

பயன்படுத்தி $\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}$ -ன் மதிப்பைக்

காண்க. C என்பது நேர்மத் திசையில் எடுக்கப்பட்ட $|z| = 2$ என்ற வட்டம்.

14. (a) State and prove Cauchy's residue theorem.

(b) Using residue theorem, evaluate $\int_C \frac{dz}{z^3(z-1)}$

where C is the circle $|z| = 2$.

(அ) கோஷியின் எச்சத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(ஆ) எச்சத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\int_C \frac{dz}{z^3(z-1)}$ -ன்

மதிப்பைக் காண்க. C என்பது $|z| = 2$ என்ற வட்டம்.

Or

(c) Determine the classify the singular points of

$$\frac{1}{(2 \sin z - 1)^2}.$$

(d) State and prove Rouché's theorem.

(இ) $\frac{1}{(2 \sin z - 1)^2}$ என்பதன் வழுப்புள்ளிகளைக் கண்டு

அவைகளை வகைப்படுத்துக.

(ஈ) ரோச்சல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

15. (a) Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{dv}{(a + b \cos \theta)^2}$ ($a > b > 0$).

(b) Prove that $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$.

(அ) மதிப்பிடுக $\int_0^{2\pi} \frac{dv}{(a + b \cos \theta)^2}$ ($a > b > 0$).

(ஆ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}$ என்று நிறுவுக.

Or

(c) State and prove Jordan's lemma.

(d) Using the lemma evaluate $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)} dx$.

(இ) ஜோர்டனின் துணைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(ஈ) அந்த துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)} dx$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.