

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

## SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Show that  $\vec{F} = (4xy - z^3)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - 3xz^2\vec{k}$  is irrotational.  
 $\vec{F} = (4xy - z^3)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - 3xz^2\vec{k}$  என்பது சுழலற்றது என நிறுவுக.
2. Find the directional derivative of  $x + xy^2 + yz^3$  at  $(0, 1, 1)$  along  $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .  
 $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  திசையில்  $(0, 1, 1)$ ல்  $x + xy^2 + yz^3$  -ன் திசை வகையீடு காண்க.
3. Evaluate  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$  where  $\vec{f} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$  and  $C$  is the straight line  $y = x$  joining the points  $(0, 0)$  and  $(1, 1)$ .  
 $\vec{f} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$  என்றும்  $C$  என்பது  $(0, 0)$ -வையும்  $(1, 1)$ -ஐயும் இணைக்கும்  $y = x$  என்ற நேர்கோடு எனில்  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$  கண்டுபிடி.
4. Using Stoke's theorem show that  $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$  where  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  
 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  எனில்  $\int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$  என ஸ்டோக்ஸ்-சின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி நிறுவுக.
5. Find the point where the line  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{2}$  meets the plane  $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ .  
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{2}$  என்ற கோடு  $2x - 3y + 2z + 3 = 0$  என்ற தளத்தை சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

6. Find the equation of the sphere with centre  $(-1, 2, -3)$  and radius 3 units.

மையம்  $(-1, 2, -3)$ -ம் ஆரம் 3 அலகும் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. Write the condition for the equation  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$  to represent a right circular cone.

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$  என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் எனில் அதற்கான நிபந்தனையை கூறுக.

8. Find the equation of the cone of second degree which passes through the axes.

ஆய அச்சக்கள் வழிச் செல்லும் கூம்பின் இருபடிச் சமன்பாடு காண்க.

9. Examine the convergence of  $\left\{ \frac{n-1}{2n+3} \right\}$ .

$\left\{ \frac{n-1}{2n+3} \right\}$  எனும் ஒழுங்கு வரிசையின் குவிவுத் தன்மையை ஆராய்க.

10. Give two example for oscillating sequence.

ஊசலாடும் ஒழுக்கு வரிசை - இரு சான்றுகள் தருக.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Prove that  $\nabla^2(r^n \bar{r}) = n(n+3)r^{n-2}\bar{r}$ .
- (b) If  $\nabla\phi = (y + y^2 + z^2)\bar{i} + (x + z + 2xy)\bar{j} + (y + 2zx)\bar{k}$ ,  $\phi(1, 1, 1) = 3$ , find  $\phi$ .

(அ)  $\nabla^2(r^n \bar{r}) = n(n+3)r^{n-2}\bar{r}$  என நிறுவுக.

(ஆ)  $\nabla\phi = (y + y^2 + z^2)\bar{i} + (x + z + 2xy)\bar{j} + (y + 2zx)\bar{k}$ ,  
 $\phi(1, 1, 1) = 3$  எனில்  $\phi$  -ன் மதிப்பு காண்க.

Or

(c) If  $\bar{F} = x^2y\bar{i} + xz\bar{j} + 2yz\bar{k}$  then prove that  $\text{div}(\text{curl } \bar{F}) = 0$ .

(d) Find the equation of the tangent plane to the surface  $x^2yz + 4xz^2 = 6$  at the point  $(1, -2, -1)$ .

(இ)  $\bar{F} = x^2y\bar{i} + xz\bar{j} + 2yz\bar{k}$  எனில்  $\text{div}(\text{curl } \bar{F}) = 0$  என நிறுவுக.

(ஈ)  $x^2yz + 4xz^2 = 6$  -க்கு  $(1, -2, -1)$  என்ற புள்ளியில் இருக்கும் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

12. (a) Verify Gauss divergence theorem for  $\bar{F} = y\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k}$  over the cylindrical region  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .

$\bar{F} = y\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k}$  சார்பிற்கு  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$  உருளைப் பகுதியில் காஸியின் பாய்வுத் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

Or

(b) Verify Stoke's theorem for  $xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$  taken over the surface in the plane  $x + y + z = 1$  bounded by  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

$xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$  எனும் சார்பிற்கு  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  எனும் தளங்களில் அடைப்படும் பரப்பின் மீது ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

13. (a) Find the equation of the sphere that passes through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$ ,  $x + 2y + 3z = 8$  and touches the plane  $4x + 3y = 25$ .

(அ)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 0$ ,  $x + 2y + 3z = 8$  எனும் வட்டத்தின் வழியாக  $4x + 3y = 25$  எனும் தளத்தைத் தொட்டுச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Or

- (b) Find the image of the point  $(1, -2, 3)$  in the plane  $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ .

- (c) Find the shortest distance and equation of the shortest distance between the lines  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$  and  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ .

(ஆ)  $2x - 3y + 2z + 3 = 0$  என்ற தளத்தில்  $(1, -2, 3)$  என்ற புள்ளியின் பிம்பம் காண்க.

(இ)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ ,  $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  எனும் கோடுகளுக்கு இடையேயான மீச்சிறு தூரத்தையும், அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

14. (a) Prove that the equation

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 14xy + 5yz - 6zx + 8x - 19y - 2z - 20 = 0$$

represents a cone. Find the vertex of the cone.

- (b) Prove that the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone if  $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ .

(அ)  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 14xy + 5yz - 6zx + 8x - 19y - 2z - 20 = 0$  ஒரு கூம்பின் சமன்பாடு என நிரூபி. கூம்பின் முனை காண்க.

(ஆ)  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  சமன்பாடு  $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$  எனில் ஒரு கூம்பின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

Or

(c) The plane  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  meets the co-ordinates axes in  $A, B, C$ . Prove that the equation to the cone generated by lines drawn from 0 to meet the circle  $ABC$  is  $yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$ .

(இ)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  என்ற தளம் ஆய அச்சக்களை  $A, B, C$  புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. ஆதியிலிருந்து வட்டம்  $ABC$ -க்கு வரையப்படும் கோடுகளால் பிறப்பிக்கப்படும் கூம்பின் சமன்பாடு  $yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$  என நிரூபி.

15. (a) If  $\{a_n\}$  converges to  $a$  and  $\{b_n\}$  converges to  $b$ . Show that  $\{a_n + b_n\}$  converges to  $a + b$ .
- (b) Discuss the convergence of the series

$$1 + \frac{(1!)^2}{2!}x + \frac{(2!)^2}{4!}x^2 + \frac{(3!)^2}{6!}x^3 + \dots$$

(அ)  $\{a_n\}$  என்பது  $a$ -க்கும்  $\{b_n\}$  என்பது  $b$ -க்கும் குவியும் எனில்  $\{a_n + b_n\}$  என்பது  $a + b$ -க்கு குவியும் எனக் காட்டுக.

(ஆ)  $1 + \frac{(1!)^2}{2!}x + \frac{(2!)^2}{4!}x^2 + \frac{(3!)^2}{6!}x^3 + \dots$  ன் குவிதலை ஆராய்க.

Or

- (c) If  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  is convergent, then prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .
- (d) Show that the series  $\sum \frac{\{(n+1)r\}^n}{n^{n+1}}$  is convergent if  $r < 1$  and divergent if  $r \geq 1$ .
- (இ)  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  குவியும் எனில்  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  எனக் காட்டுக.
- (ஈ)  $\sum \frac{\{(n+1)r\}^n}{n^{n+1}}$  என்ற தொடர்  $r < 1$  எனும் பொழுது குவியும் எனவும்  $r \geq 1$  எனும் பொழுது விரியும் எனவும் நிறுவுக.
-