

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Find the directional derivative of ϕ where

$$\phi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\phi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{எனில்} \quad \phi\text{-ன்} \quad \text{திசையிய}$$

வகைக்கெழு காண்க.

2. If \vec{a} is a constant vector, show that $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$.

\vec{a} என்பது மாறிலி வெக்டர் எனில், $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$ என நிரூபி.

3. Evaluate $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{A} = 3xy\vec{i} - y^2\vec{j}$, along $y = 2x^2$ in the xy plane from (0,0) to (1,2).

$\vec{A} = 3xy\vec{i} - y^2\vec{j}$ எனில் xy தளத்தில் (0,0) விலிருந்து (1,2) வரை $y = 2x^2$ வழியே $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ஐ மதிப்பிடுக.

4. Evaluate $\iint_S (xdydz + ydzdx + zdx dy)$ over the surface S of a sphere of radius a .

ஆரம் a கொண்ட கோளத்தின் புறப்பரப்பு S எனில் $\iint_S (xdydz + ydzdx + zdx dy)$ -ஐ மதிப்பிடுக.

5. Find the equation of the line passing through the point $(3, 2, -8)$ and perpendicular to the plane $-3x + y + 2z - 2 = 0$.

$(3, 2, -8)$ என்ற புள்ளி வழிச் சென்று $-3x + y + 2z - 2 = 0$ என்ற தளத்திலிருந்து செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

6. Find the equation of the sphere with centre $(-1, 2, -3)$ and radius 3 units.

மையப்புள்ளி $(-1, 2, -3)$ மற்றும் ஆரம் 3 அலகுகளுடன் கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. Find the equation to the cone with vertex at the origin and whose generators pass through the circle $ax^2 + by^2 = cz$; $lx + my + nz = p$.

ஆதியை உச்சமாகவும், $ax^2 + by^2 = cz$;
 $lx + my + nz = p$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும்
 பிறப்பாக்கிகளும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு காண்க.

8. Find the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, whose axis is along $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has a semi-vertical angle of 60° .

ஆதியில் உச்சமும், அச்ச $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ வழியாகவும் அரை
 உச்சிக்கோணம் 60° -ம் கொண்ட செங்குத்து வட்ட கூம்பின்
 சமன்பாடு காண்க.

9. Test whether the sequence $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற தொடர் வரிசை ஒருங்குகின்றதா
 என சோதிக்கவும்.

10. State the comparison test for absolute convergence.

அற ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டுச் சோதனையை எழுதுக.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Determine $f(r)$ so that the vector $f(r)\vec{r}$ is both solenoidal and irrotational.
- (b) If $\nabla\phi = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$, find $\phi(x, y, z)$, of $\phi(1, -2, 2) = 4$.
- (அ) பாய்வற்றதும், சுழச்சியற்றதுமான வெக்டர் $f(r)\vec{r}$ எனில் $f(r)$ -ஐக் காண்க.
- (ஆ) $\nabla\phi = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$, $\phi(1, -2, 2) = 4$ எனில் $\phi(x, y, z)$ -ஐக் காண்க.

Or

- (c) Find the angle between surfaces $z = x^2 + y^2 - 3$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ at $(2, -1, 2)$.
- (d) If ϕ and f differentiable scalar point functions, prove that $\nabla\phi \times \nabla f$ is solenoidal.

(இ) $(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் $z = x^2 + y^2 - 3$,
 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ஆகிய புறப்பரப்புகளுக்கு
இடையேயான கோணத்தை காண்க.

(ஈ) ϕ மற்றும் f ஆகியன வகையிடத்தக்க திசையிலி
புள்ளி சார்புகள் எனில், $\nabla\phi \times \nabla f$ என்பது
பாய்வற்றது என நிரூபி.

12. (a) Verify Gauss's divergence theorem for
 $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ taken over the cube
bounded by the planes $x = 0$, $x = a$, $y = 0$,
 $y = a$, $z = 0$ and $z = a$.

தளங்கள் $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$
மற்றும் $z = a$ உள்ளடக்கிய கனசதுரத்தில்
 $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ -ற்கு காஸின் பாய்வுத்
தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

Or

(b) Verify Stokes theorem for $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - xz\vec{k}$
over the upper half of the sphere
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின்
மேற்பகுதியில் $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} - xz\vec{k}$ -ற்கு
ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

13. (a) Prove that the origin lies in the acute angle between the planes $x + 2y + 2z = 9$ and $4x - 3y + 12z + 13 = 0$. Find the planes bisecting the angles between them and point out which bisects the acute angle.

(b) Show that the lines $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ and $\frac{x-8}{7} = y-4 = \frac{z-5}{3}$ are coplanar. Find their common point and the equation of the plane in which they lie.

(அ) ஆதிப்புள்ளி $x + 2y + 2z = 9$ மற்றும் $4x - 3y + 12z + 13 = 0$ ஆகிய தளங்களுக்கு இடையேயான குறுங்கோணத்தில் உள்ளது என நிறுவுக. இத்தளங்களுக்கு இடையேயான கோணங்களை இருசமமாக வெட்டும் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இவற்றுள் எது குறுங்கோணத்தை வெட்டும் என எழுதுக.

$$(ஆ) \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}, \quad \frac{x-8}{7} = y-4 = \frac{z-5}{3}$$

ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒரு தளத்தில் உள்ளன எனக் காண்பி. இவற்றின் பொதுவான புள்ளி மற்றும் இவை உள்ள பொதுவான தளத்தின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

Or

(c) Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y - z + 2 = 0$ at the point $P(1, -2, 1)$. And also cuts orthogonally the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4 = 0$.

(d) Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 5$ for a great circle.

(இ) $3x + 2y - z + 2 = 0$ என்ற தளத்தினை $P(1, -2, 1)$ என்ற புள்ளியில் தொட்டு, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4 = 0$ என்ற கோளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ள கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(ஈ) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 5$ என்ற வட்டத்தினை மீப்பெரு வட்டமாகக் கொண்டுள்ள கோளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

14. (a) Find the equation of the right circular cone which passes through the line $2x = 3y = -5z$ and has $x = y = z$ as its axis.

(b) Find the condition for the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

to represent a right circular cone. Obtain the equation of the axis.

(அ) $x = y = z$ என்ற கோட்டினை அச்சாக கொண்டு $2x = 3y = -5z$ என்ற கோடு வழியாகச் செல்லும் செங்குத்து வட்டக் கூம்பின் சமன்பாடு காண்க.

(ஆ) $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ என்ற சமன்பாடு செங்குத்து வட்டக் கூம்பாக இருக்க நிபந்தனையைக் காண்க. இதன் அச்சினைப் பெறுக.

Or

(c) Find the equation to the right circular cylinder whose guiding curve is $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - y + z = 3$.

(d) Find the equation to the right circular cylinder of radius 3, with its axis along the line $x + z + 2 = 0 = x - 2y + 4$.

(இ) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - y + z = 3$ என்ற வழிகாட்டும் வளைவரை கொண்ட செங்குத்து வட்ட உருளையின் சமன்பாடு காண்க.

(ஈ) ஆரம் 3 மற்றும் $x + z + 2 = 0 = x - 2y + 4$ என்ற நேர்கோடு வழியே செல்லும் அச்சினையும் கொண்ட செங்குத்து வட்ட உருளையின் சமன்பாடு காண்க.

15. (a) Find the limit of the sequence

$$\left\{ \frac{2n}{n + 4n^{1/2}} \right\}_{n=1}^{\infty}, \text{ if it exists.}$$

(b) Show that a non decreasing sequence which is bounded above is convergent.

(அ) $\left\{ \frac{2n}{n + 4n^{1/2}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற தொடர்வரிசைக்கு எல்லை இருக்குமேயானால், அதனைக் காண்க.

(ஆ) குறையாத தொடர்வரிசை மேல்வரம்பு கொண்டது எனில் ஒருங்கும் எனக் காண்பி.

Or

(c) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

(d) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series, show that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(இ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்ற தொடர் விரியும் எனக் காண்பி.

(ஈ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஓர் ஒருங்கு தொடர் எனில்,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ எனக் காண்பி.
