(8 pages)

MAY 2012 **U/ID 4722/PAU**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. State least upper bound axiom.

   மீச்சிறு மேல்வரம்பு விதியினை எழுதுக.

2. Prove that the set of all integers is countable.

   முழு எண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

3. If G_1 and G_2 are open subsets of the metric space M then prove that $G_1 \cap G_2$ is also open.

   யாப்பு வெளி M-ல் G_1 மற்றும் G_2 என்பவைகள் திறந்த உட்கணங்கள் எனில் $G_1 \cap G_2$ -ம் திறந்த உட்கணம் என நிரூபி.

4. State the Rolle's theorem.

   ரோலின் தேற்றத்தை எழுதுக.

5. Show that the function $f(z) = \bar{z}$ is nowhere differentiable.

   $f(z) = \bar{z}$ என்ற சார்பானது எங்கும் வகையிடத்தக்கதல்ல எனக் காட்டுக.

6. Show that the function $e^x(\cos y + i\sin y)$ is analytic.

$e^x(\cos y + i\sin y)$ என்ற சார்பானது பகுமுறை சார்பு எனக் காட்டுக.

7. Define conformal transformation.

இணங்கும் உருமாற்றம் வரையறு.

8. Find the bilinear transformation which maps the points $z = \infty, i, 0$, into the points $0, i, \infty$ respectively.

$z = \infty, i, 0$ என்ற புள்ளிகளை முறையே $0, i, \infty$ என்ற புள்ளிகளுக்கு மாற்றும் இருமாறி நேரியல் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

9. Find the residue of $\dfrac{z^2}{z^2 + a^2}$ at $z = ia$.

$\dfrac{z^2}{z^2 + a^2}$ என்பதற்கு $z = ia$ -யிடத்து எச்சத்தைக் காண்க.

10. State Taylor's theorem.

டெய்லரின் தேற்றத்தை எழுதுக.

SECTION B — ($5 \times 16 = 80$ marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Prove that the set R of all real numbers is uncountable.

(b) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$, $\langle M_2, \rho_2 \rangle$, $\langle M_3, \rho_3 \rangle$ be metric spaces and let $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$. If f is continuous at $a \in M_1$ and g is continuous at $f(a) \in M_2$ then prove that $g \circ f$ is continuous at a.

(அ) மெய்யெண்களின் கணம் R எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிரூபி.

(ஆ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$, $\langle M_2, \rho_2 \rangle$, $\langle M_3, \rho_3 \rangle$ என்பவைகள் யாப்பு வெளிகள் என்க. $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ என்க. f ஆனது $a \in M_1$-யிடத்து தொடர்ச்சியாகவும், g ஆனது $f(a) \in M_2$-யிடத்து தொடர்ச்சியாகவும் இருந்தால் $g \circ f$ ஆனது a-யிடத்து தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

Or

(c) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space and let a be a point in M. Let f and g be real-valued functions whose domains are subsets of M. If $\lim_{x \to a} f(x) = L$ and $\lim_{x \to a} g(x) = N$ then prove that $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = LN$.

(d) If B is an infinite subset of the countable set A then prove that B is countable.

(இ) $\langle M, \rho \rangle$ என்பது ஒரு யாப்பு வெளி என்க. M-ல் ஒரு புள்ளி a என்க. மெய்மதிப்பு சார்புகள் f மற்றும் g-ன் அரங்கங்கள் M-ன் உட்கணங்கள் என்க. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{x \to a} g(x) = N$ எனில் $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = LN$ என நிரூபி.

(ஈ) எண்ணிடத்தக்க கணம் A-ன் முடிவற்ற உட்கணம் B எனில் B-யும் எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

12. (a) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be metric spaces and let $f : M_1 \to M_2$. Then prove that f is continuous on M_1 if and only if $f^{-1}(G)$ is open in M_1 whenever G is open in M_2.

(b) State and prove the Taylor's formula with the integral form of the remainder.

(அ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ மற்றும் $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ என்பவைகள் யாப்பு வெளிகள் என்க. $f : M_1 \to M_2$ என்க. f என்பது M_1 -ல் தொடர்ச்சியானது எனில், எனில் மட்டுமே M_1 -ல் $f^{-1}(G)$ ஆனது திறந்த வெளியாகும் இங்கு G ஆனது M_2 -ல் திறந்த வெளி.

(ஆ) தொகை வடிவில் மீதியுள்ள டெய்லரின் வாய்ப்பாட்டினை எழுதி நிரூபி.

Or

(c) If $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$ then prove that $f + g \in R[a, b]$ and $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(d) Let f be a continuous function from a metric space M_1 into a metric space M_2. If M_1 is connected then prove that the range of f is also connected.

(இ) $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$ எனில் $f + g \in R[a, b]$ மற்றும் $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ என நிரூபி.

(ஈ) யாப்பு வெளி M_1 -லிருந்து யாப்பு வெளி M_2 -க்கு f ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு என்க. M_1 இணைந்தது எனில் f-ன் வீச்சும் இணைந்தது என நிரூபி.

13. (a) Prove that the function

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

satisfies Laplace's equation and determine the corresponding analytic function $u + iv$.

(b) State and prove the necessary condition for $f(z)$ to be analytic.

(அ) $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ என்பது லாப்லாஸின் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்கிறது என நிரூபி. மேலும் இத்துடன் ஒத்த $u + iv$ என்ற பகுமுறைச் சார்பினைக் காண்க.

(ஆ) $f(z)$ என்ற சார்பு பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்கான தேவையானக் கட்டுப்பாட்டினை எழுதி நிரூபி.

Or

(c) Show that function $u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

(d) If $f(z)$ is a regular function of z prove that $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$.

(இ) $u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ என்ற சார்பு இசைச் சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் இசை இணையைக் காண்க.

(ஈ) $f(z)$ என்பது z-ல் பகுமுறை சார்பு எனில் $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ என நிரூபி.

14. (a) Show that the cross ratio of four complex numbers is unaffected by a bilinear transformation.

(b) Find the value of the integral $\int_C \frac{dz}{z-a}$ round a circle whose equation is $|z-a| = \rho$.

(அ) நான்கு கற்பனை எண்களின் இருமாறி நேரியல் உருமாற்றத்தினால் குறுக்கு வீதம் மாறாது என நிறுவுக.

(ஆ) C என்பது ஒரு வட்டம் அதன் சமன்பாடு $|z-a| = \rho$ எனில் $\int_C \frac{dz}{z-a}$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

Or

(c) Obtain the images of the lines $x=0$ and $y=0$ under the transformation $w=z^2$.

(d) Find the bilinear transformation which maps the points $z=0, -i, -1$ into the points $w=i, 1, 0$.

(இ) $w=z^2$ என்ற உருமாற்றத்தின் கீழ் $x=0$ மற்றும் $y=0$ என்ற கோடுகளின் பிம்பங்களைக் காண்க.

(ஈ) $z=0, -i, -1$ என்ற புள்ளிகளை $w=i, 1, 0$ என்ற புள்ளிகளுக்கு உருமாற்றும் இருமாறி நேரியல் உருமாற்றத்தினைக் காண்க.

15. (a) Expand $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z^2 - z - 2)}$ in powers of z; where (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $|z| > 2$.

(அ) $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z^2 - z - 2)}$ -யை z-ன் அடுக்குகளாக விரித்து எழுதுக. இங்கு (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$, (iii) $|z| > 2$.

Or

(b) Let $f(z)$ be analytic inside and on a simple closed contour C. Let z_0 be any point interior to C. Prove that $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\, dz$.

(c) Evaluate $\displaystyle\int_C \dfrac{z^2 + 5z + 6}{z-2}\, dz$ where C is $|z| = 1$.

(ஆ) $f(z)$ என்பது C என்ற எளிய மூடிய உருவரையின் மேலும் அதன் உள்ளும் பகுமுறை சார்பு என்க. z_0 என்பது C-ன் உள்ளே உள்ள புள்ளி எனில் $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\, dz$ என நிறுவுக.

(இ) மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_C \dfrac{z^2 + 5z + 6}{z-2}\, dz$ இங்கு C என்பது $|z| = 1$.