OCTOBER 2011 **U/ID 4722/PAU**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Define a set. If $f : A \to B$ $X \subset A, Y \subset A$ then state the values of $f(X \cup Y), f(X \cap Y)$.

   வரையறு : கணம் $f : A \to B$ $X \subset A, Y \subset A$ எனில் $f(X \cup Y), f(X \cap Y)$ வரையறு.

2. Define limit of a function at a point.

   சார்பின் எல்லையை ஒரு புள்ளியில் வரையறு.

3. Define closed set in a metric space.

   ஒரு யாப்பு வெளியில், மூடிய கணம் வரையறு.

4. Define upper sum of f in $[a, b]$.

   f என்ற சார்பின் $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் மேல் கூடுதலை வரையறு.

5. Show that $f(z) = \bar{z}$ is nowhere differentiable.

$f(z) = \bar{z}$ என்ற சார்பு எந்தப் புள்ளியிலும் வகையிடத்தக்கதல்ல எனக்காட்டுக.

6. Give an example to show that continuity of a function at a point does not imply the existence of derivative at that point.

ஒரு சார்பு ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் அந்தப் புள்ளியில் வகையிட முடியும் என்ற தேவையில்லை என்பதற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

7. Define bilinear transformation.

இரு நேரிய உருமாற்றம் வரையறு.

8. Define conformal mapping.

சமகோண திசைமாறா உருமாற்றம் வரையறு.

9. Define pole. Find the pole of $\dfrac{1-e^{2z}}{z^3}$.

முனைப்புள்ளியை வரையறு. $\dfrac{1-e^{2z}}{z^3}$ என்ற சார்பின் முனைப் புள்ளிகள் காண்க.

10. Find the residues of $\dfrac{1}{z^2+1}$ at its poles.

$\dfrac{1}{z^2+1}$ என்ற சார்பின் முனைப்புள்ளிகளில் $\dfrac{1}{z^2+1}$ ன் எச்சங்களை காண்க.

SECTION B — ($5 \times 16 = 80$ marks)

Answer ALL questions.

Each questions carries 16 marks.

11. (a) Show that $\sin(1/x)$ does not approach a limit as $x \to 0$.

(b) If the real valued functions f and g are continuous at $a \in R$ then prove that $f+g, f-g$ are also continuous at a.

(அ) x பூஜ்ஜியத்தை நெருங்கும்போது $\sin(1/x)$ என்ற சார்புக்கு எல்லை இல்லை என காட்டு.

(ஆ) f மற்றும் g என்ற மெய்மதிப்பு சார்புகள் $a \in R$ – ல் தொடர்ச்சியானதாக இருக்குமாயின், $f+g$, மற்றும் $f-g$ தொடர்ச்சியானது என நிரூபி.

Or

(c) Let (M,S) be a metric space and let a be a point in M. Let f and g be real valued functions whose domains are subsets of M. If $\lim_{x \to a} f(x) = L$ and $\lim_{x \to a} g(x) = N$. Prove that

$$\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)] = L+N$$

$$\lim_{x \to a}[f(x)-g(x)] = L-N\,.$$

(d) Let (M_1,S_1), (M_2,S_2), (M_3,S_3) be metric spaces and let $f : M_1 \to M_2$ $g : M_2 \to M_3$. If f is continuous at $a \in M_1$ and g is continuous at $f(a) \in M_2$ then prove that $g \circ f$ is continuous at a.

(இ) (M,S) ஒரு யாப்பு வெளி என்க; a என்பது M–ல் ஒரு புள்ளி என்க. f மற்றும் g என்பன மெய்மதிப்பு சார்புகள் என்க. f மற்றும் g ன் மதிப்பகங்கள், M ன் உட்கணங்கள் என கொள்க.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ மேலும் $\lim_{x \to a} g(x) = M$ எனில்

$$\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)] = L+N$$

$\lim_{x \to a}[f(x)-g(x)] = L-N$ என நிரூபி.

(ஈ) (M_1,S_1), (M_2,S_2), (M_3,S_3) என்பவை யாப்பு வெளிகள் என்க. $f: M_1 \to M_2$ மற்றும் $g: M_2 \to M_3$ என்க. அவ்பொழுது $a \in M_1$–ல் f தொடர்ச்சியாக இருந்தால் மற்றும் $f(a) \in M_2$ –ல் g தொடர்ச்சியாக இருந்தால், $g \circ f$ தொடர்ச்சியாக இருக்கும் என நிரூபி.

12. (a) Define open set in a metric space. If G_1 and G_2 are open subsets of the metric space M, prove that $G_1 \cap G_2$ is also open.

(b) Let f be a continuous read-valued function on the closed bounded interval $[a,b]$. If the maximum value for f is attained at c where $a < c < b$ and if $f'(c)$ exists then prove that $f'(c) = 0$.

(அ) ஒரு யாப்புவெளியில் திறந்த கணம் என்ன என்று வரையறு. ஒரு யாப்பு வெளியில் G_1 மற்றும் G_2 திறந்த உட்கணங்கள் M எனில், $G_1 \cap G_2$ –ம் திறந்த உட்கணம் என்று நிரூபி.

(ஆ) மூடிய வரம்புடைய இடைவெளி $[a,b]$ ன் மேல் f என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான மெய்மதிப்பு சார்பு என்க. $a < c < b$ என்றவாறுள்ள c ல், f மீப்பெரும் மதிப்பு அடைந்தால் மேலும் $f'(c)$ இருக்கும் என்றால் , $f'(c) = 0$. என நிரூபி.

Or

(c) Suppose f has a derivative at c and that g has a derivative at $f(c)$. Then prove that $\phi = g \circ f$ has a derivative at c and prove that $\phi'(c) = g'(f(c)).f'(c)$.

(d) If $f \in R[a,b]$ and λ is any real number, show that $\lambda f \in R[a,b]$ and prove that $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

(இ) f என்ற சார்பு c என்ற புள்ளியில் வகையிட முடியும் எனவும் g என்ற சார்பு $f(c)$ என்ற புள்ளியில் வகையிட முடியும் எனவும் கொள்க. $\phi = g \circ f$ என்ற சார்பு c ல், வகையிட முடியும் என நிரூபி. மேலும் $\phi'(c) = g'(f(c)).f'(c)$ என நிரூபி.

(ஈ) $f \in R[a,b]$ மற்றும் λ என்பது ஏதாவதொரு மெய்யெண் என்க. அப்பொழுது $\lambda f \in R[a,b]$ எனவும் $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ எனவும் நிரூபி.

13. (a) Show that $f(z) = |z|^2$ is differentiable at $z = 0$ but not analytic at $z = 0$.

(b) Derive Cauchy-Riemann equation in polar coordinates.

(அ) $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பு $z=0$ என்ற புள்ளியில் மட்டும் வகையிட முடியும் ஆனால் $z=0$ என்ற புள்ளியில், பகுமுறை சார்பாக இருக்காது என்று நிரூபி.

(ஆ) கோண தூரக் கூறுகளில் காஷி–ரீமான் சமன்பாடுகளை காண்க.

Or

(c) State and prove sufficient condition for a function to be analytic.

(d) If a function $f(z) = u + iv$ is analytic in a domain D then prove that u and v are harmonic in D.

(இ) ஒரு சார்பு பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்கு போதுமான நிபந்தனையை கூறி நிரூபி.

(ஈ) D என்ற அரங்கில் $f(z) = u + iv$ என்ற சார்பு பகுமுறைச் சார்பு எனில், u மற்றும் v ஆகிய சார்புகள் இசைச் சார்புகள் என்று நிரூபி.

14. (a) Find the image of $1 < x < 2$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

(b) Find the bilinear transformation which maps $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ respectively onto $w_1 = i, w_2 = 0 \ \ w_3 = -i$.

(அ) $w=\dfrac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தின் கீழ் $1<x<2$ ன் பிம்பம் காண்க.

(ஆ) $z_1=1, z_2=i, z_3=-1$ என்ற புள்ளிகள் முறையே $w_1=i, w_2=0$, $w_3=-i$ என்ற புள்ளிகளுக்கு உருமாற்றம் செய்யும் நேரிய விகிதமுறு உரு மாற்றம் காண்க.

Or

(c) Discuss the salient features of transformation $w=z^2$.

(d) Find $\int_c f(z)\,dz$ where C is the circle $|z|=1$ and when

(i) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-3}$

(ii) $f(z)=ze^{-z}$.

(இ) $w = z^2$ என்ற உருமாற்றத்தின் சிறப்பு இயல்புகளை ஆய்க.

(ஈ) C என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டமாக இருக்குமாயின், $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ மற்றும் $f(z) = ze^{-z}$ என்ற சார்புகளுக்கு, $\int_c f(z)\,dz$ காண்க.

15. (a) State and prove Cauchy's integral formula.

(b) Find $\int_c \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz$ where c is $|z| = 1$.

(அ) காஷியின் தொகை சூத்திரத்தை கூறி நிரூபி.

(ஆ) c என்பது $|z| = 1$ என்ற வட்டமாயின், $\int_c \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz$ காண்க.

Or

(c) Find the Taylor's series expansion about $z = 0$ of $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)\,(z-3)}$.

(d) State and prove Cauchy's residue theorem.

(இ) $z = 0$ என்ற புள்ளியை சுற்றி $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)\,(z-3)}$ என்ற சார்புக்கு டெய்லரின் தொடரை காண்க.

(ஈ) காஷியின் எச்சத் தேற்றத்தை கூறி நிரூபி.
