(8 pages)

OCTOBER 2012 **U/ID 4722/PAU**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 2 marks.

1. Define metric space.

   யாப்புவெளி வரையறு.

2. Define characteristic function.

   சிறப்பியல்பு சார்பினை வரையறு.

3. Define a dense set in a metric space.

   யாப்புவெளியில் அடர்த்திக் கணம் வரையறு.

4. State Rolle's theorem.

   ரோலின் தேற்றத்தை எழுதுக.

5. Prove that $u = y^3 - 3x^2 y$ is a harmonic function.

   $u = y^3 - 3x^2 y$ என்பது ஒரு இசைச் சார்பு என நிரூபி.

6. State the necessary condition for $f(z)$ to be analytic function.

   $f(z)$ பகுமுறை சார்பாக இருப்பதற்கான தேவையானக் கட்டுப்பாட்டினை எழுதுக.

7. Define bilinear transformation.

இருகூறு நேரிய உருமாற்றத்தை வரையறு.

8. State Cauchy-Goursat theorem.

கோசி கௌர்சாட் தேற்றத்தை எழுதுக.

9. Find the residue of $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ at $z=a$.

$z=a$ இடத்து $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ -ன் எச்சத்தைக் காண்க.

10. Expand $\cos z$ about the point $z=\frac{\pi}{2}$.

$z=\frac{\pi}{2}$ -யைப் பொருத்து $\cos z$ -யை விரித்து எழுதுக.

SECTION B — (5 × 16 = 80 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 16 marks.

11. (a) Prove that countable union of countable sets is countable.

(b) If $\lim_{x\to a} f(x)=L$ and $\lim_{x\to a} g(x)=M$ then prove that (i) $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x)=LM$ and (ii) if $M\neq 0$ $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L}{M}$.

(அ) எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் எண்ணிடத்தக்கச் சேர்ப்பு எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

(ஆ) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{x \to a} g(x) = M$ எனில்

(i) $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = LM$ மற்றும்

(ii) $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{L}{M}$ இங்கு $M \neq 0$ என நிரூபி.

Or

(c) Prove that the set R of all real numbers is uncountable.

R என்ற மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிரூபி.

12. (a) Let G be an open subset of the metric space M. Prove that $M - G$ is closed.

(b) If $f \in \mathbf{R}[a,b]$ and λ is any real number, then prove that $\lambda f \in \mathbf{R}[a, b]$ and $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

(அ) யாப்பு வெளி M -ல் G ஆனது திறந்த உட்கணம் எனில் $M - G$ மூடிய கணம் என நிரூபி.

(ஆ) $f \in \mathbf{R}\,[a,b]$ மற்றும் λ என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய் எண் எனில் $\lambda f \in \mathbf{R}[a, b]$ மற்றும் $\int_a^b \lambda\, f = \lambda \int_a^b f$ என நிரூபி.

Or

(c) If f is a continuous function on the closed bounded interval $[a, b]$ and if $f'(x)$ exists for all x in (a,b) then prove that there exists c in (a,b) such that $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(d) Let f be a bounded function on the closed bounded interval $[a, b]$. Then prove that $f \in \mathbf{R}[a, b]$ if and only if, for each $\in > 0$, there exists a subdivision σ of $[a, b]$ such that

$U[f\,;\,\sigma] < L[f\,;\,\sigma] + \in$.

(இ) $[a, b]$ என்ற மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியில் f ஆனது தொடர்ச்சியான சார்பு என்க : மேலும் (a,b)-ல் எல்லா x -க்கும் $f'(x)$ இருந்தால் (a,b)-ல் c யைக் கண்டு $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ எனக் காட்டுக.

(ஈ) $[a, b]$ என்ற மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியில் f ஆனது வரம்புடைய சார்பு என்க. $f \in \mathbf{R}[a, b]$ என இருப்பதற்கான தேவையான போதுமான கட்டுப்பாடு ஒவ்வொரு $\in > 0$ க்கும் $[a, b]$-ன் உட்பிரிவு σ என இருந்தால் $U[f ; \sigma] < L[f ; \sigma] + \in$ என நிரூபி.

13. (a) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function then prove that polar form of the Cauchy-Riemann equations are $u_r = \frac{v_\theta}{r}$ and $u_\theta = -rv_r$.

(b) Let $f(z) = u + i v$ be an analytic function in a region D then prove that $f(z)$ is constant in D if $|f(z)|$ is constant.

(அ) $f(z) = u + iv$ என்பது பகுமுறை சார்பு எனில் கோணா-தூர வடிவில் கோஷி-ரீமான் சமன்பாடுகள் $u_r = \frac{v_\theta}{r}$ மற்றும் $u_\theta = -rv_r$ என நிரூபி.

(ஆ) D என்ற அரங்கத்தில் $f(z) = u + i v$ பகுமுறை சார்பு என்க $|f(z)|$ மாறிலியாக இருந்தால் $|f(z)|$ -ம் மாறிலி என நிரூபி.

Or

(c) If $u = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$ then find the corresponding analytic function $f(z) = u + i v$.

(d) Examine whether the function $f(z) = |z|^2$ is differentiable or not.

(இ) $u = \dfrac{\sin 2x}{\cosh 2y + \cos 2x}$ எனில்; அதனைக் கொண்டு இணைந்த $f(z) = u + iv$ என்ற பகுமுறை சார்பினைக் காண்க.

(ஈ) $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்பானது வகையிடத்தக்கதா இல்லையா எனச் சோதித்துப் பார்.

14. (a) Discuss the transformation $w = e^z$.

(b) Find the fixed points of $w = \dfrac{z-1-i}{z+2}$.

(அ) $w = e^z$ உருமாற்றத்தை நன்கு விவரி.

(ஆ) $w = \dfrac{z-1-i}{z+2}$ -ன் நிலைத்த புள்ளிகளைக் காண்க.

Or

(c) If $w = u + iv$ prove that the transformation $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ transforms $|z| < 1$ into the half plane $u > 0$.

(d) Find the bilinear transformation which maps the points $z = 2$, $i, -2$ into the points $w = 1, i, -1$ respectively.

(இ) $w = u + iv$ என்க $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ என்ற உருமாற்றம் $|z| < 1$ என்பதை $u > 0$ என்ற அரைத்தளத்திற்கு உருமாற்றுகிறது என நிரூபி.

(ஈ) $z = 2$, $i, -2$ என்ற புள்ளிகளை முறையே $w = 1, i, -1$ என்ற புள்ளிகளுக்கு உருமாற்றும் இருகூறு நேரிய உருமாற்றத்தைக் காண்க.

15. (a) Let f be analytic inside and an a simple closed curve C. Let z_0 be any point inside C. Then prove that $f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$.

(b) Evaluate $\displaystyle\int_c \dfrac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ where C is the circle $|z| = 2$.

(அ) C என்ற எளிய மூடிய வளைவரையின் மேலும் மற்றும் உள்ளேயும் f ஆனது பகுமுறை சார்பு என்க. C -ன் உள்ளே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி z_0 என்க.

$f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$ என நிரூபி.

(ஆ) மதிப்பிடுக $\int_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ இங்கு C என்ற வட்டம் $|z| = 2$.

Or

(c) Expand $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ as a power series in z in the regions (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 2$ (iii) $|z| > 2$.

(d) Find the residue of $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$.

(இ) $\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ என்பதை (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 2$ (iii) $|z| > 2$ என்ற அரங்கங்களில் z-ன் அடுக்குகளாக விரித்து எழுதுக.

(ஈ) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$ -ன் எச்சத்தைக் காண்க.

———————