(6 pages)

OCTOBER 2011 **U/ID 32355/UCME**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 3 = 30 marks)

Answer any TEN questions.

Each questions carries 3 marks.

1. Define permutation group.

   வரிசை மாற்று குலம் வரையறு.

2. If ϕ is a homomorphism of G onto $\overline{G}$. Prove that $\phi(e)=\overline{e}$, where e and $\overline{e}$ are unit elements of G and $\overline{G}$ respectively.

   ϕ என்பது Gல் இருந்து $\overline{G}$ க்கு செல்லும் செயல்மாறா மேல் கோர்த்தல் எனில் $\phi(e)=\overline{e}$, இங்கு e மற்றும் $\overline{e}$ என்பவைகள் முறையே G மற்றும் $\overline{G}$-ன் சமனி உறுப்புகள்.

3. State Cauchy's theorem for abelian groups.

   அபீலியன் குலத்திற்கான கோசியின் தேற்றத்தை எழுதுக.

4. Define integral domain.

   எண் அரங்கம் வரையறு.

5. Define maximal ideal.

   மீப்பெரு சீரிய கணம் வரையறு.

6. If S is a subsets of V. Prove that $L(L(S)) = L(S)$.

வெக்டர்வெளி V இல் S ஒரு உட்கணம் எனில் $L(L(S)) = L(S)$ என நிரூபி.

7. Define orthogonal vectors.

செங்குத்து வெக்டர்கள் வரையறு.

8. Define orthonormal vectors.

செங்குத்து அலகு வெக்டர்கள் வரையறு.

9. Define characteristic root.

வரையறு : சிறப்பியல்பு மூலம்.

10. Define Rank of matrix.

அணியின் தரம் - வரையறு.

11. Define regular and singular elements in $A(V)$.

$A(V)$ -ல் ஒழுங்கு மற்றும் தனித்த உறுப்புகளை வரையறு.

12. Define a linearly dependent set of vectors in a vector space.

வெக்டர் வெளியில் நேரியல் சார்ந்த வெக்டர்களை வரையறு.

PART B — ($5 \times 6 = 30$ marks)

Answer any FIVE questions.

Each questions carries 6 marks.

13. If G is a finite group and N is a normal subgroup of G, prove that $O(G/N) = \dfrac{O(G)}{O(N)}$.

    G என்பது ஒரு முடிவுறு குலம் மற்றும் N என்பது G-ன் நேர்மை உட்குலம் எனில் $O(G/N) = \dfrac{O(G)}{O(N)}$ என நிறுவுக.

14. If $O(G) = P^2$ where P is a prime number, prove that G is abelian.

    P ஒரு பகா எண், $O(G) = P^2$ எனில் G ஒரு அபீலியன் குலம் என நிரூபி.

15. If R is a ring, prove that for all $a, b \in R$

    (a) $0a = a0 = 0$

    (b) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

    (c) $(-1)a = -a$.

    R என்பது ஒரு வளையம், $a, b \in R$ எனில்

    (அ) $0a = a0 = 0$

    (ஆ) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

    (இ) $(-1)a = -a$ என நிரூபி.

16. If V is a finite dimensional vector space, prove that it contains a finite set $v_1, v_2 \ldots. v_n$ of linearly independent elements whose linear span is V.

V என்ற முடிவுறு பரிமாண வெக்டர் வெளி என்க இவ்வெளி $v_1, v_2 \ldots. v_n$ என்ற நேரியல் சார்பற்ற கணத்தைக் கொண்டிருக்கும் மேலும் அதன் நேரியல் உருவாக்கம் V என நிரூபி.

17. If $u, v \in V$ then prove that $\left|(u, v)\right| \leq \|u\| \, \|v\|$.

$u, v \in V$ எனில் $\left|(u, v)\right| \leq \|u\| \, \|v\|$ என நிரூபி.

18. If V is finite dimensional over F, prove that $T \in A(V)$ is regular iff T maps V onto V.

V என்பது F -ல் முடிவுறு பரிமாணமுடையது எனில் $T \in A(V)$ ஒழுங்காக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே Vயிலிருந்து Vக்கு T மேல்கோர்த்தலாகும் என நிரூபி.

19. If V is finite dimensional over F prove that

(a) $r(ST) \leq r(T)$

(b) $r(TS) \leq r(T)$.

V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி எனில்

(அ) $r(ST) \leq r(T)$

(ஆ) $r(TS) \leq r(T)$ என நிரூபி.

PART C — ($4 \times 10 = 40$ marks)

Answer any FOUR questions.

Each questions carries 10 marks.

20. State and prove fundamental theorem of group homomorphism.

குலத்தில் மேற்கோர்த்தலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

21. (a) Let R be a commutative ring with unit element whose only ideals are $\{0\}$ and R itself. Prove that R is a field.

(b) If F is a field then prove that it has two ideals $\{0\}$ and F itself.

(அ) R என்பது பரிமாற்று வளையம் என்க. $\{0\}$ மற்றும் R என்பது அதன் சீரிய கணங்கள் எனில் R ஒரு களம் என நிரூபி.

(ஆ) F என்பது ஒரு களம் எனில் F-லுள்ள சீரிய கணங்கள் $\{0\}$ மற்றும் F மட்டுமே என நிரூபி.

22. If $v_1, v_2 \ldots. v_n$ is a basis of V over F and if $w_1, w_2 \ldots. w_m$ in V are linearly indenpendent over F, prove that $m \leq n$.

F என்ற தளத்தைப் பொருத்து V-ன் அடிமானம் $v_1, v_2 \ldots. v_n$ மற்றும் F என்ற கணத்தைப் பொறுத்து V-ன் நேரியல் சார்பற்ற வெக்டர்கள் $w_1, w_2 \ldots. w_m$ எனில் $m \leq n$ என நிறுவுக.

23. State and prove Gram-Schmidt orthogonalization process.

கிராம்-ஸ்கிமிட்-ன் செங்குத்து மயமாக்குதல் முறையை கூறி நிறுவுக.

24. If A and B are finite dimensional subspaces of a vector space V, prove that $(A+B)$ is finite dimensional and $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$.

வெக்டர் வெளி V-ன் முடிவுறு பரிமாண உட்வெளிகள் A மற்றும் B எனில் $(A+B)$ என்பது முடிவுறு பரிமாணம் என்றும் மற்றும் $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$ என நிறுவுக.

25. If V is n-dimensional vector space over F and if $T\in A(V)$ has all its characteristic roots in F then prove T satisfies a polynomial of degree n over F.

V என்பது F இல் n-பரிமாணமுடைய வெக்டர் வெளி மற்றும் $T\in A(V)$ ஆனது அதன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மூலங்களை F இல் கொண்டுள்ளது எனில் T ஆனது Fஇல் n படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை நிறைவு செய்யும் என நிரூபி.