(8 pages)

OCTOBER 2013 **U/ID 32355/UCME**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — ($10 \times 3 = 30$ marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 3 marks.

1. Define a normal subgroup of a group G. Can we say that every abelian group is normal?

   G என்ற ஒரு குலத்தின் ஒரு நேர்மை உட்குலத்தை வரையறு. எந்தவொரு பரிமாற்று குலமும் ஒரு நேர்மை குலம் என்று கூற முடியுமா?

2. Prove that a group homomorphism preserves inverses.

   ஒரு குல செயலொப்புமை நேர்மாற்று உறுப்புகளை பாதுகாக்கும் என்று நிறுவுக.

3. If $a = (5, 7, 9)$ and $b = (1, 2, 3)$, compute $a^{-1}ba$.

   $a = (5, 7, 9)$ மற்றும் $b = (1, 2, 3)$ எனில் $a^{-1}ba$ -வைக் காண்க.

4. Define a division ring.

   ஒரு வகுத்தல் வளையத்தை வரையறு.

5. If a ring homomorphism is an isomorphism, what can you say about its kernel?

ஒரு வளைய செயலொப்புமை ஒரு சம ஒப்புமை எனில், அதன் உட்கருவைப் பற்றி என்ன கூற முடியும்?

6. Let R be a ring and $a, b, c \in R$. Prove that if $a \mid b$ and $a \mid c$ then $a \mid (b+c)$.

R என்பது ஒரு வளையம். மேலும் $a, b, c \in R$ என்க. எனில் $a \mid b$ மற்றும் $a \mid c$ எனில் $a \mid (b+c)$ என்று நிறுவுக.

7. If F is the field of real numbers, prove that the vectors (1, 1, 0, 0), (0, 1, –1, 0) and (0, 0, 0, 3) in $F^{(4)}$ are linearly independent over F.

F என்பது மெய்யெண்களின் களம். $F^{(4)}$-ல் உள்ள திசையன்கள் (1, 1, 0, 0), (0, 1, –1, 0) மற்றும் (0, 0, 0, 3) என்பன F-ன் மேல் நேரியல் சார்பற்றது என நிறுவுக.

8. If W is a subspace of a vector space V, define the annihilator of W.

W என்பது V என்ற திசையன் வெளியின் உள்வெளி எனில் W-ன் நீக்கியை வரையறு.

9. If V is a vector space over F, $u \in V$ and $\alpha \in F$, prove that $\| \alpha u \| = | \alpha | \, \| u \|$.

V என்பது F-ன் மேல் ஒரு திசையன் வெளி. $u \in V$ மற்றும் $\alpha \in F$ என்க. எனில் $\| \alpha u \| = | \alpha | \, \| u \|$ என்று நிறுவுக.

10. Define the rank of a linear transformation.

ஒரு நேரியல் உருமாற்றியின் தரத்தை வரையறு.

11. Let V be the vector space of all polynomials over F of degree ≤ 3. Let D be the differentiation operator defined by $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) D = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$. Find the matrix of D relative to the basis $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ and $v_4 = x^3$.

V என்பது F-ன் மேல் படி 3 அல்லது அதற்குக் குறைவான படிகளையுடைய அனைத்து பல்லுறுப்பான்களின் திசையன் வெளி. D என்ற வகையீட்டுச் செயலி என வரையறுப்பின் $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) D = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$ எனில் $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ மற்றும் $v_4 = x^3$ என்ற அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து D-ன் அணியினைக் காண்க.

12. Define similar linear transformations.

ஒத்த நேரியல் உருமாற்றங்களை வரையறு.

PART B — $(5 \times 6 = 30$ marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 6 marks.

13. Let G and $\overline{G}$ be two groups and $\phi: G \to \overline{G}$ is a homomorphism with kernel K. Prove that K is a normal subgroup of G.

G மற்றும் $\overline{G}$ என்பன இரண்டு குலங்கள். $\phi: G \to \overline{G}$ என்பது K என்ற உட்கரு கொண்ட ஒரு செயலொப்புமை எனில் K என்பது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்று நிறுவுக.

14. If G is a group with $o(G) = p^n$ where p is a prime number, prove that $Z(G) \neq (e)$.

G என்பது ஒரு குலம், மேலும் $o(G) = p^n$ என்க. இங்கு p என்பது ஒரு பகா எண் எனில் $Z(G) \neq (e)$ என்று நிறுவுக.

15. Prove that a finite integral domain is a field.

எந்தவொரு முடிவுள்ள எண் அரங்கமும் ஒரு களம் என்று நிறுவுக.

16. Prove that the ideal $A=(a_0)$ is a maximal ideal of the Euclidean ring R if and only if a_0 is a prime element of R.

$A=(a_0)$ என்ற சீர்மம் R என்ற யூக்ளிடியன் வளையத்தின் பெரும சீர்மமாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை a_0 என்பது R-ல் ஒரு பகா உறுப்பு என்பதே என்று நிறுவுக.

17. If U and W are subspaces of a vector space V, prove that $U+W=\{v\in V / v=u+w,\ u\in U,\ w\in W\}$ is a subspace of V.

U மற்றும் W என்பன V என்ற திசையன் வெளியின் உள்வெளிகள் எனில்

$U+W=\{v\in V / v=u+w,\ u\in U,\ w\in W\}$

என்பது V-ன் ஒரு உள்வெளி என்று நிறுவுக.

18. If V is a vector space and $u, v\in V$, then prove that $|(u, v)|\leq\|u\|\,\|v\|$.

V என்பது ஒரு திசையன் வெளி. மேலும் $u, v\in V$ எனில் $|(u, v)|\leq\|u\|\,\|v\|$ என்று நிறுவுக.

19. If $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ in F are distinct characteristic roots of $T \in A(V)$ and if $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are characteristic vectors of T belonging to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectively, prove that $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are linearly independent over F.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ என்பன F-ல் $T \in A(V)$ -ன் வெவ்வேறான சிறப்பு மூலங்கள். மேலும் $v_1, v_2, \ldots, v_k$ என்பன முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ என்பன பொறுத்த T-யின் சிறப்பு திசையன்கள் எனில் $v_1, v_2, \ldots, v_k$ என்பன F-ன் மேல் நேரியல் சார்பற்றவை என்று நிறுவுக.

PART C — $(4 \times 10 = 40$ marks)

Answer any FOUR questions.

Each question carries 10 marks.

20. If $\vartheta(G)$ is the group of inner automorphisms of a group G and Z is the center of G, prove that $\vartheta(G) \approx G | Z$.

$\vartheta(G)$ என்பது G என்ற குலத்தின் உள் தன் ஒப்புமைகளைக் கொண்ட ஒரு குலம். Z என்பது G-ன் மையம் எனில் $\vartheta(G) \approx G | Z$ என்று நிறுவுக.

21. Prove that every group is isomorphic to a subgroup of $A(S)$ for some appropriate S.

எந்தவொரு குலமும் பொருத்தமான S-யைக் கொண்ட $A(S)$ என்பதன் ஒரு உள் குலத்திற்கு சம ஒப்புமையயானதாக இருக்கும் என்று நிறுவுக.

22. Let R be a commutative ring with unit element whose only ideals are (0) and R itself. Prove that R is a field.

R என்பது அலகு உறுப்பைக் கொண்ட ஒரு பரிமாற்று வளையம். அதன் சீர்மங்கள் (0) மற்றும் R மட்டுமே எனில் R என்பது ஒரு களம் என்று நிறுவுக.

23. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

எந்தவொரு எண் அரங்கத்தையும் ஒரு களத்தில் பதிக்க முடியும் என்று நிறுவுக.

24. If V and W are of dimensions m and n, respectively, over F, then prove that $\mathrm{Hom}(V, W)$ is of dimension mn over F.

V மற்றும் W என்பன F-ன் மேல் முறையே m மற்றும் n என்ற பரிமாணங்கள் உடையன. எனில் $\mathrm{Hom}(V, W)$ என்பது F-ன் மேல் mn என்ற பரிமாணம் உடையது என்று நிறுவுக.

25. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove that there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ என்பதன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F-ல் உள்ளன. T என்பதன் அணி முக்கோண அணியாக இருக்குமாறு V-ல் ஒரு அடிக்கணம் உள்ளது என்று நிறுவுக.