(7 pages)

OCTOBER 2012 **U/ID 32355/UCME**

Time : Three hours Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 3 = 30 marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 3 marks.

1. If $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ and $\phi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, find the right cosets of $H=\{e,\phi\}$ in S_3.

   $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ மற்றும் $\phi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ என்றால் S_3 -ல் $H=\{e,\phi\}$ என்பதன் வல இணைகணங்களைக் காண்க.

2. Let G be the group of integers under addition and let $\phi:G\to G$ be defined by $\phi(x)=2x$. Prove that ϕ is a homomorphism.

   G என்பது கூட்டலைப் பொறுத்த முழு எண்களின் குலம். $\phi:G\to G$ என்பதன் வரையறை $\phi(x)=2x$. ϕ என்பது ஒரு செயலொப்புமை என்று நிறுவுக.

3. Express the permutation $(1,2), (1, 2, 3)(1, 2)$ as a product of disjoint cycles.

$(1,2), (1, 2, 3)(1, 2)$ என்ற வரிசை மாற்றத்தை, பொது உறுப்பற்ற சுழல்களின் பெருக்கலாக எழுதுக.

4. Prove that every field is an integral domain.

எந்தவொரு களமும் ஒரு எண் அரங்கம் என்று நிறுவுக.

5. If U is an ideal of R and $1 \in U$, prove that $U = R$.

U என்பது R-ன் ஒரு சீர்மம். மேலும் $1 \in U$ எனில் $U = R$ என்று நிறுவுக.

6. Define an Euclidean ring.

ஒரு யூக்ளிடியன் வளையத்தை வரையறு.

7. Define the linear span of a non empty subset S of a vector space V and prove that it is a subspace of V.

V என்ற திசையின் வெளியின் வெற்றல்லாத உட்கணம் S-ன் நேரியல் அளாவலின் வரையறையை எழுதி அது V-யின் ஒரு உள்வெளி என்று நிறுவுக.

8. If V is a vector space over F and if $u, v \in V$ and $\alpha \in F$, prove that $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

V என்பது F-ன் மேல் ஒரு திசையின் வெளி. $u, v \in V$ மற்றும் $\alpha \in F$ எனில் $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ என்று நிறுவுக.

9. If F is the field of real numbers, find $A(W)$ where W is spanned by $(1, 2, 3)$ and $(0,4,-1)$.

F என்பது மெய்யெண்களின் களம். W என்பது $(1, 2, 3)$ மற்றும் $(0,4,-1)$ என்பனவற்றின் அளாவல் எனில் $A(W)$-வைக் காண்க.

10. If T is a linear transformation with rank of T, $r(T)=0$, what can you say about T?

T என்ற நேரியல் உருமாற்றத்தின் தரஎண் $r(T)=0$ எனில், T -யைப் பற்றி என்ன கூற முடியும்?

11. If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$, prove that there exist $v \neq 0$ in V such that $vT = \lambda v$.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$-ன் சிறப்பு மூலம் எனில் $vT = \lambda v$ எனுமாறு V -யில் ஒரு $v \neq 0$ இருக்கும் என்று நிறுவுக.

12. Let $V = F^{(3)}$ and suppose that $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ is the matrix of $T \in A(V)$ in the basis $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$. Find the matrix of T in the basis $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ and $u_3 = (0, 0, 1)$.

$V = F^{(3)}$ என்க $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்பது $T \in A(V)$ -யின், $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ என்ற அடிக்கணத்தைப் பொறுத்த அணி எனில் T -ன் அணியை $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$ என்ற அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து காண்க.

PART B — (5 × 6 = 30 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 6 marks.

13. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

செயலொப்புமைக்கான அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

14. Prove that the alternating group A_n is a normal subgroup of S_n and $[S_n : A_n] = 2$.

A_n என்ற ஒன்றாடக் குலம் S_n என்பதன் நேர்மை உட்குலம் என்று நிறுவி $[S_n : A_n] = 2$ என்று நிறுவுக.

15. If R is a commutative ring with unit element and M is an ideal of R, prove that M is a maximal ideal of R if and only if R/M is a field.

R என்பது அலகு உறுப்பு உடைய ஒரு பரிமாற்று வளையம், மேலும் M என்பது R-ன் ஒரு சீர்மம். M என்பது R-ன் பெரும சீர்மமாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை R/M என்பது ஒரு களம் என்பதே என்று நிறுவுக.

16. State and prove unique factorisation theorem.

ஒரே வழிப்பகுத்தல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

17. If V is a finite-dimensional vector space over F, prove that any two bases of V have the same number of elements.

V என்பது F-ன் மேல் முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட ஒரு திசையின் வெளி. V-ன் எந்த இரண்டு அடிக்கணங்களிலும் ஒரே எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகள் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

18. Derive Schwarz inequality.

ஸ்வார்ட்ஸ்-ன் சமனின்மையை தருவி.

19. If V is finite-dimensional over F, prove that $T \in A(V)$ is invertible if and only if the constant term of the minimal polynomial for T is not 0.

V என்பது F-ன் மேல் முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்டது. $T \in A(V)$ என்பது நேர்மாற்றலுடையதாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை T-ன் சிறும பல்லுறுப்பானின் மாறா உறுப்பு 0 அல்ல என்பதே என்று நிறுவுக.

PART C — (4 × 10 = 40 marks)

Answer any FOUR questions.

Each question carries 10 marks.

20. State and prove Cayley's theorem.

கேய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

21. Derive the class equation of a group G. Using the class equation, prove that if p is a prime number and $p|O(G)$, then G has an element of order p.

G என்ற ஒரு குலத்தின் வகுப்புச் சமன்பாட்டினை தருவி அதனைப் பயன்படுத்தி, p என்பது ஒரு பகா எண் மற்றும் $p|O(G)$ எனில் G-யில் p நிலைமம் கொண்ட ஒரு உறுப்பு இருக்கும் என்று நிறுவுக.

22. If U is an ideal of a ring R, prove that R/U is a ring and is a homomorphic image of R.

U என்பது R என்ற ஒரு வளையத்தின் சீர்மம், எனில் R/U என்பது ஒரு வளையம் என்று நிறுவுக. மேலும் அது R-ன் செயலொப்புமை எதிருருவம் என்றும் நிறுவுக.

23. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

எந்தவொரு எண் அரங்கத்தையும் ஒரு களத்தில் பதிக்க முடியும் என நிறுவுக.

24. If V is a finite-dimensional inner product space and if W is a subspace of V, prove that $V = W + W^{\perp}$.

V என்பது முடிவுள்ள பரிமாணம் கொண்ட ஒரு உள் பெருக்கல் வெளி. W என்பது V-ன் உள்வெளி எனில் $V = W + W^{\perp}$ என்று நிறுவுக.

25. If V is n-dimensional over F and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

V என்பது F-ன் மேல் n-பரிமாணம் கொண்டது, $T \in A(V)$ என்பதன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F-ல் உள்ளன எனில் T என்பது F-ன் மேல் n படி கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்பானை திருப்தி செய்யும் என நிறுவுக.