

(8 pages)

OCTOBER 2013

U/ID 32351/UCMA

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 3 = 30 marks)

Answer any TEN questions.

Each questions carries 3 marks.

1. If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ and $\frac{1}{\gamma}$.

α, β மற்றும் γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ இவற்றை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை காண்க.

2. Diminish the roots of the equation $x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ by 2.

$x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை இரண்டு குறைக்க கிடைக்கும் சமன்பாட்டை காண்க.

3. Show that $2 \left[1 + \frac{(\log_e n)^2}{2} + \frac{(\log_e n)^4}{4} + \dots \right] = n + \frac{1}{n}$.

$$2 \left[1 + \frac{(\log_e n)^2}{2} + \frac{(\log_e n)^4}{4} + \dots \right] = n + \frac{1}{n}$$

சமனை நிரூபி.

4. Show that $\tanh(3A) = \frac{3 \tanh A + \tanh^3 A}{1 + 3 \tanh^2 A}$.

$$\tanh(3A) = \frac{3 \tanh A + \tanh^3 A}{1 + 3 \tanh^2 A}$$

என்பதை நிரூபி.

5. Write the expansion of $\sin 6\theta$.

$\sin 6\theta$ - ன் விரிவை எழுதுக.

6. Show that the matrix $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ is

orthogonal.

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

மேற்கண்ட அணி ஒர் செங்குத்து அணி

எனக் காட்டு.

7. Let $G = \{1, -1\}$. If G with respect to usual multiplication is a cyclic group, find its generators.

$G = \{1, -1\}$. பெருக்கல் செயலியை பொருத்து ஓர் சக்கர குலமாயின் அதன் பிறப்பாக்கியை எழுதுக.

8. Find the value of $\phi(15)$, where $\phi(n)$ in a Euler phi function.

$\phi(n)$ என்ற ஆய்லர் - பை சார்புக்கு $\phi(15)$ -ன் மதிப்பு காண்.

9. Show that $3^{40} \equiv 1 \pmod{5}$.

$3^{40} \equiv 1 \pmod{5}$ எனக் காட்டு.

10. Find the value of $\log(3 + 4i)$.

$\log(3 + 4i)$ -ன் மதிப்பு காண்க.

11. Write a formula find the sum of n terms of the series, $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + \overline{n-1} \beta) + ..$

$\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + \overline{n-1} \beta) + ..$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண வாய்பாட்டை எழுதுக.

12. Find the sum of the series.

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+1.2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2.3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+3.4}\right) +$$

$$\dots + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+1.2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+2.3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+3.4}\right) +$$

$$\dots + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right) \quad \text{மேற்கண்ட தொடரின்}$$

கூடுதல் காண்க.

PART B — (5 × 6 = 30 marks)

Answer any FIVE questions.

Each questions carries 6 marks.

13. Solve the equation

$$3x^6 + x^5 - 27x^4 + 27x^2 - x - 3 = 0 .$$

$$3x^6 + x^5 - 27x^4 + 27x^2 - x - 3 = 0 \quad \text{என்ற}$$

சமன்பாட்டை தீர்.

14. Sum to infinity the series

$$\frac{15}{16} + \frac{15.21}{16.24} + \frac{15.21.27}{16.24.32} + \dots$$

$$\frac{15}{16} + \frac{15.21}{16.24} + \frac{15.21.27}{16.24.32} + \dots \quad \text{என்ற தொடரின் கூடுதலை}$$

கந்தழி வரை காண்க.

15. Expand $\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ in a series of cosines of multiples of θ .

$\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ - ன் விரிவை θ -ன் மடங்குகளின் கொசைன்களாக விரித்து எழுதுக.

16. Find the eigen values of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ மேற்கண்ட அணியின் ஐகன் மதிப்புகளை

காண்க.

17. Let G be the group of all real 2×2 matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with $ad - bc \neq 0$ under matrix multiplication let $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} \in G / ad \neq 0 \right\}$. show that H is a subgroup of G .

G என்பது எல்லா 2×2 வரிசையுடைய மெய் எண் உறுப்புகளுடைய அணி $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$,

G அணிப்பெருக்கலைப் பொருத்து ஒர் குலம் $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} \in G / ad \neq 0 \right\}$ எனில் H என்பது G ன்

உட்குலம் என நிரூபி.

18. Find the remainder when 16^{53} is divided by 7.

16^{53} ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி காண்க.

19. Find the sum to n terms of the series $\cos ec\theta \cos ec2\theta + \cos ec2\theta \cos ec3\theta + \cos 3\theta \cos ec4\theta + ..$

$\cos ec\theta \cos ec2\theta + \cos ec2\theta \cos ec3\theta + \cos 3\theta \cos ec4\theta + ..$

என்ற தொடரின் n உறுப்புகள் கூடுதல் காண்க.

PART C — ($4 \times 10 = 40$ marks)

Answer any FOUR questions.

Each questions carries 10 marks.

20. Find the equation whose roots are the roots of the equation $4x^4 + 32x^3 + 83^2 + 76x + 21 = 0$ increased by 2 and hence solve the given equation.

$4x^4 + 32x^3 + 83^2 + 76x + 21 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 2 கூடுதலாக மூலங்களை கொண்ட சமன்பாட்டை காண். இதிலிருந்து மேற்கண்ட சமன்பாட்டை தீர்.

21. Sum to infinity the series

$$\frac{1^2}{1} + \frac{1^2 + 2^2}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3} + \dots \infty .$$

$$\frac{1^2}{1} + \frac{1^2 + 2^2}{2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3} + \dots \infty \text{ என்ற தொடரின்}$$

கூடுதலை கந்தழி வரை காண்க.

22. If $\cos(x + iy) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, prove that $y = \frac{1}{2} \log \frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x + \alpha)}$.

$\cos(x + iy) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ எனில் $y = \frac{1}{2} \log \frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x + \alpha)}$ நிரூபி.

23. Test the consistency and solve the system of equation

$$x + 2y + z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 5$$

$$3x - 5y + 5z = 2$$

$$3x + 9y - z = 4.$$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடையது எனக் காட்டி அதை தீர்.

$$x + 2y + z = 3$$

$$2x + 3y + 2z = 5$$

$$3x - 5y + 5z = 2$$

$$3x + 9y - z = 4.$$

24. State and prove Largange's theorem.

லெக்ராஞ்சின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

25. (a) Sum the series

$$\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right) + 3\sin^3\left(\frac{\theta}{3^2}\right) + 3^2\sin^3\left(\frac{\theta}{3^3}\right) + \dots \text{ to } n \text{ terms.}$$

$$\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right) + 3\sin^3\left(\frac{\theta}{3^2}\right) + 3^2\sin^3\left(\frac{\theta}{3^3}\right) + \dots$$

மேற்கண்ட தொடரின் n உறுப்புகள் கூடுதல் காண்க.

(b) Sum to infinity the series:

$$\sin \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \dots + \infty .$$

$$\sin \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \dots + \infty \quad \text{என்ற}$$

தொடரின் கூடுதலை கந்தழி வரை காண்க.