

(7 pages)

OCTOBER 2012

U/ID 32351/UCMA

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

PART A — (10 × 3 = 30 marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 3 marks.

1. Form the biquadratic equation two of whose roots are  $i$  and  $\sqrt{3}$ .

$i$  மற்றும்  $\sqrt{3}$  இரு மூலங்களாக கொண்ட நான்கு படி சமன்பாட்டை காண்க.

2. Using descarte's rule of signs find the nature of roots of the equation  $x^4 + 3x - 1 = 0$ .

$x^4 + 3x - 1 = 0$  என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையை டெர்-கார்டஸின் விதி மூலம் ஆராய்க.

3. Simplify:  $1 - \frac{1}{1} \frac{3}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^2$   
 $- \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \right)^3 + ..$

$$1 - \frac{1}{1} \frac{3}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

மேற்கண்ட தொடரை

சுருக்குக.

4. Write the expansion of  $\tan n\theta$ .

$\tan n\theta$  - ன் விரிவை எழுதுக.

5. Show that  $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ .

$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log_e \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  எனக் காட்டு.

6. Show that the matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 3-4i \\ -3-4i & 0 \end{pmatrix}$  is skew-Hermitian.

$\begin{pmatrix} 0 & 3-4i \\ -3-4i & 0 \end{pmatrix}$  என்ற அணி எதிர்-ஹெர்மிஷியன் அணி எனக் காட்டு.

7. Using Cayley-Hamilton theorem find  $A^{-1}$  for the matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் நேர்மாறு அணி  $A^{-1}$  ஐ கெய்லி - ஹாமில்டன் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி காண்.

8. If  $H$  and  $K$  are sub groups of a group  $G$ , show that  $H \cup K$  need not be a subgroup of  $G$ .

$H$  மற்றும்  $K$  என்பன  $G$  - ன் உட்குலங்கள் என்க.  $H \cup K$  என்பது  $G$  ன் உட்குலமாக இருக்க அவசியமில்லை எனக் காட்டு.

9. Test whether the number 1729 is prime or composite.

1729 என்ற எண் பகு எண்ணா? அல்லது பகா எண்ணா? என ஆராய்க.

10. Show that  $(2 + 3)^5 \equiv (2^5 + 3^5) \pmod{5}$ .

$(2 + 3)^5 \equiv (2^5 + 3^5) \pmod{5}$  எனக் காட்டு.

11. Find the value of  $\log(1 + i)$ .

$\log(1 + i)$  - ன் மதிப்பு காண்க.

12. Find the sum of the series

$$\begin{aligned} & \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+1.2x^2}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+2.3x^2}\right] \\ & + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+3.4x^2}\right] + \dots + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+n(n+1)x^2}\right]. \\ & \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+1.2x^2}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+2.3x^2}\right] \\ & + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+3.4x^2}\right] + \dots + \tan^{-1}\left[\frac{x}{1+n(n+1)x^2}\right] \end{aligned}$$

மேற்கண்ட தொடரின் கூடுதலை காண்க.

PART B — (5 × 6 = 30 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 6 marks.

13. Find the sum to infinity the series

$$1 + \frac{2^3}{2} + \frac{3^3}{3} + \frac{4^3}{4} + \dots \infty .$$

$$1 + \frac{2^3}{2} + \frac{3^3}{3} + \frac{4^3}{4} + \dots \infty \quad \text{மேற்கண்ட தொடரின்}$$

கூடுதலை எண்ணிலி வரை காண்க.

14. If  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  are the roots of the equation  $x^3 + qx + r = 0$ , form the equation whose roots are  $\frac{\beta^2 + r^2}{\beta\gamma}$ ,  $\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha}$  and  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ .

$\alpha$ ,  $\beta$  மற்றும்  $\gamma$  என்பன  $x^3 + qx + r = 0$  என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்  $\frac{\beta^2 + r^2}{\beta\gamma}$ ,  $\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha}$  மற்றும்

$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$  - ஐ மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாட்டை எழுதுக.

15. Show that

$$\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta$$

$$\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta$$

எனக் காட்டு.

16. Show that  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$  is unitary.

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$  ஓர் அலகு சார்ந்த அணி எனக் காட்டு.

17. Show that  $a \equiv b \pmod{H}$  is a equivalence relation where  $H$  is a subgroup of  $G$ .

$G$  - ன் உட்குலம்  $H$  எனில்  $a \equiv b \pmod{H}$  ஓர் சமான தொடர்பு என நிரூபி.

18. Show that  $i^i = e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$  where  $n$  is an integer.

$i^i = e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$ ,  $n$  முழு எண் எனக் காட்டு.

19. Sum the series.

$\sinh x + \sinh(x+y) + \sinh(x+2y) + \dots +$  to  $n$  term.

$\sinh x + \sinh(x+y) + \sinh(x+2y) + \dots +$

மேற்கொண்ட தொடரில்  $n$  உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

PART C — (4 × 10 = 40 marks)

Answer any FOUR questions.

Each question carries 10 marks.

20. Find an approximate root (correct to two decimals) between 1 and 2 for the equation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  using Horner's method.

$x^3 - 3x + 1 = 0$  என்ற சமன்பாட்டிற்கு தோராயமான மூலத்தை இரு தசம திருத்தமாக 1 மற்றும் 2 எண்களுக்கிடையில் ஹார்னர் முறை மூலம் காண்க.

21. Increase the roots of the equation  $6x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 8x + 4 = 0$  by 1 and hence solve it.

$6x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 8x + 4 = 0$  என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 1 அதிகமாக பெற்ற மூலங்களை கொண்ட சமன்பாட்டை காண், இதிலின்று மேற்கண்ட சமன்பாட்டை தீர்.

22. Show that

$$\cos^3 \theta \sin^4 \theta = \frac{1}{64}(\cos 7\theta - \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 3\cos \theta).$$

$$\cos^3 \theta \sin^4 \theta = \frac{1}{64}(\cos 7\theta - \cos 5\theta - 3\cos 3\theta + 3\cos \theta)$$

மேற்கண்ட சமனை நிரூபி.

23. Find characteristic roots and corresponding characteristic vectors for the matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ மேற்கண்ட அணியின் சிறப்பியல்பு}$$

மூலங்கள் மற்றும் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களை காண்க.

24. State and prove Wilson's theorem.

வில்சனின் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

25. Separate into real and imaginary parts  $\tan^{-1}(x + iy)$ .

$\tan^{-1}(x + iy)$  - ன் மெய் மற்றும் கற்பனை பகுதிகளை எழுதுக.