

इण्टरमीडिएट
प्रतिदर्श प्रश्न पत्र
2015
गणित

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक - 100

Maximum Marks - 100

- निर्देश :**
- (I) प्रश्न पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - (II) इस प्रश्न पत्र में कोई व्यापक विकल्प नहीं है, तथापि कुछ प्रश्नों में अन्तः विकल्प उपलब्ध हैं। विकल्प वाले प्रश्नों में आपको दिये गये चयन में से केवल एक प्रश्न ही करना है।
 - (III) प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक उनके सामने दर्शाये गये हैं।

प्रश्न 1. क्या फलन $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ जो $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित है आच्छादक है ? 1

Question 1. Whether the function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ defined by $f(x) = 3x$ is onto ?

प्रश्न 2. यदि $\cos\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$, तो $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए ? 1

Question 2. If $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$, then evaluate $\tan \theta$?

प्रश्न 3. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$ के परिवर्त का परिवर्त आव्यूह ज्ञात कीजिए ? 1

Question 3. Write down the transpose matrix of the transpose of matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$?

प्रश्न 4. यदि किसी आव्यूह A के लिए $A^t = A$ तो A का नाम बताइये ? 1

Question 4. For a matrix A if $A^t = A$, then name matrix A ?

प्रश्न 5. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ का मान बताइये। 1

Question 5. Evaluate the determinate $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

प्रश्न 6. निरीक्षण विधि का प्रयोग करते हुए फलन $\cos 2x$ का प्रतिअवकलन ज्ञात कीजिए। 1

Question 6. Find the anti derivative for the function $\cos 2x$ using inspection method.

प्रश्न 7. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ? 1

Question 7. Evaluate $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$

प्रश्न 8. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ? 1

Question 8. Find unit vector in the direction of vector $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$?

प्रश्न 9. दो बिन्दुओं (4, 2, 3) तथा (4, 5, 7) को मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्-कोज्याएं लिखिए ? 1

Question 9. Write down the direction cosines of a straight line joining two points (4, 2, 3) and (4, 5, 7) ?

प्रश्न 10. उस समतल का समीकरण लिखिए जो x, y और z अक्षों से क्रमशः 2, 3 और 4 के अन्तः खण्ड काटता है। 1

Question 10. Write the equation of a plane making intercepts of length 2, 3 and 4 from the x, y and z axis respectively.

भाग - 'ब'

Section - 'B'

प्रश्न 11. निर्धारित कीजिए कि समुच्चय N में प्रदत्त निम्नलिखित द्विआधारी संक्रिया क्रमविनिमय हैं, लेकिन साहचर्य नहीं ? 4

$$a * b = \frac{(a + b)}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Question 11. Determine the following binary operations on the set N is commutative but not associative .

$$a * b = \frac{(a + b)}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

OR

यदि $f: x \rightarrow y$ एक फलन है, x में $R = \{(a, b) : f(a) = f(b)\}$ द्वारा प्रदत्त एक सम्बन्ध R परिभाषित कीजिए, जांचिए कि क्या R एक तुल्यता सम्बन्ध है अथवा नहीं ?

If $f: x \rightarrow y$ be a function define a relation R in x given by $R = \{(a, b) : f(a) = f(b)\}$ Examine whether R is an equivalence relation or not ?

प्रश्न 12. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ को सरल कीजिए। 4

Question 12. Solve $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 13. प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ? 4

Question 13. By using elementary operations, find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

OR

सिद्ध कीजिए कि - $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Prove that - $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

प्रश्न 14. एक फलन इस प्रकार परिभाषित है कि : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 4
बिन्दु $x=0$ पर सातत्य के लिए इसका परीक्षण कीजिए।

Question 14. A function is defined as : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 ax}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Examine it for continuity at the point $x=0$

प्रश्न 15. यदि $x=a(\cos t + t \sin t)$ और $y=a(\sin t + t \cos t)$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। 4

Question 15. If $x=a(\cos t + t \sin t)$ and $y=a(\sin t + t \cos t)$ then, find $\frac{d^2y}{dx^2}$

प्रश्न 16. मूल बिन्दु से वक्र $y = \sin x$ पर स्पर्शियां खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिन्दुओं का पथ वक्र $x^2y^2 = x^2 - y^2$ है 4

Question 16. Tangents are drawn from the origin to the curve $y = \sin x$ Prove that the locus of the points of contact is the curve $x^2y^2 = x^2 - y^2$

OR

अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 8$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरन्तर वर्धमान है।

(b) निरन्तर हासमान है।

find the intervals in which the function f given by $f(x) = x^2 - 4x + 8$

(a) Strictly increasing

(b) Strictly decreasing

प्रश्न 17. फलन $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए ? 4

Question 17. Integrate the function $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ with respect to x ?

प्रश्न 18. अवकलन समीकरण को हल कीजिए : $(x-y) dy - (x+y) dx = 0$ 4

Question 18. Solve the differential equation : $(x-y) dy - (x+y) dx = 0$

प्रश्न 19. अवकलन समीकरण $ydx - (x+2y^2)dy=0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4

Question 19. Find the general solution of the differential equation $ydx - (x+2y)dy=0$

प्रश्न 20. दिखाइये कि रेखा युग्म $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ और $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के मध्य का कोण

$\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ है। 4

Question 20. Show that the angle between the pair of lines

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} \text{ is } \cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$$

प्रश्न 21. बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से जाने वाले तथा समतलों $x+2y+3z=5$ तथा $3x+3y+z=0$ में से प्रत्येक पर लम्ब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

Question 21. Find the equation to the plane passing through the point $(-1, 3, 2)$ and perpendicular to the planes $x+2y+3z=5$ and $3x+3y+z=0$?

प्रश्न 22. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल और 4 काली गेंदें हैं। इनमें से तीन गेंदें यदृच्छया निकाले जाने पर सभी के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 4

Question 22. A bag contains 5 white, 7 red, and 4 black balls. On drawing three balls at random, find the probability of being all white.

OR

एक बालक द्वारा परीक्षा उत्तीर्ण की प्रायिकता $3/5$ है और एक बालिका के लिए यह प्रायिकता $2/5$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इनमें से कम से कम एक यह परीक्षा उत्तीर्ण करें।

probability that a boy passes an examination is $3/5$ and that for a girl it is $2/5$. Find the probability that at least one of them passes this examination.

SECTION 'C'

प्रश्न 23. आव्यूह विधि के प्रयोग से निम्नांकित समीकरणों को हल कीजिए - 6

$$5x+2y=3$$

$$3x+2y=5$$

Question 23. Using matrix method, solve the following system of equations -

$$5x+2y=3$$

$$3x+2y=5$$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है। 6

Question 24. Show that the semi vertical angle of the cone of the maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}\sqrt{2}$

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि : $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$ 6

Question 25. Show that : $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$

प्रश्न 26. अवकलन समीकरण को हल कीजिए : $\frac{xdy}{dx} = x + y$ 6

Question 26. Solve the differential equation : $\frac{xdy}{dx} = x + y$

प्रश्न 27. एक समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ हैं। इसके विकर्ण के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। 6

Question 27. The two adjacent sides of a parallelogram are $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ and $\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find its area.

OR

रेखाओं $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ एवं $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$ के मध्य उभयनिष्ठ लम्ब की लम्बाई एवं समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the length and the equation of the common perpendicular to the lines.

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2} \quad \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$$

प्रश्न 28. सिद्ध कीजिए कि : 6

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$$

Question 28. Prove that : $P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})}$

OR

OR

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

A man is known to speak truth three out of four times. He throws a die and reports that it is a six Find the probability that it is actually a six.

प्रश्न 29.

आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।

6

$$\text{न्यूनतम } z \geq 200x + 500y$$

$$\text{जहाँ } x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Question 29. Solve the following linear programming problem graphically

$$\text{Minimise } z \geq 200x + 500y$$

subject to the constraints

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$