

Mathematics (Code - 14)

गणित (कोड-14)

Time : 3 Hours

M.M. : 150

समय : 3 घंटे

अधिकतम अंक: 150

Note: Attempt five questions. All questions carry equal marks. Question number 1 is compulsory. Answer any two questions from part I and two questions from part II. The parts of the same questions must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

In case of any discrepancy in the English and Hindi versions, English version will be taken as final.

टिप्पणी: पाँच प्रश्न हल करें सभी के अंक समान हैं। प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। भाग 1 से दो प्रश्नों तथा भाग 2 से दो प्रश्नों का उत्तर दें। एक प्रश्न के सभी अंशों का उत्तर एक साथ दें। एक प्रश्न के अंशों का उत्तर दूसरे प्रश्न के अंशों के मध्य न ले जाये।

यदि अंग्रेजी एवं हिन्दी विवरण में कोई विसंगति हो, तो अंग्रेजी विवरण अंतिम माना जाएगा।

1. Answer any four of the following :

निम्न से कोई 4 प्रश्न हल करें।

(4X7.5=30)

(a) Find eigen values and eigen vectors of the matrix

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात करो।

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A river 10 m deep and 100 m wide is flowing at the rate 4.5 km/h. Find the volume of water running into the sea per second from the river.

एक नदी 100 मीटर चौड़ी 10 मीटर गहरी है और नदी का बहाव 4.5 कि.मी. प्रतिघंटा है। बताओ कि प्रति सेकंड कितना पानी नदी से समुंद्र में बाहेगा।

(c) Describe the surface whose equation in cylindrical coordinates is $z = r$

ऐसा पृष्ठ ज्ञात करो जिसका समीकरण बेलनाकार निर्देशांक में $z = r$ है।

(d) Find the order & degree of following differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 5y$$

निम्नलिखित अवकलन समीकरण की कोटि और घात ज्ञात करो।

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 5y$$

(e) Solve the differential equation :

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) \left(y - x \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$$

अवकलन समीकरण को हल करो :

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) \left(y - x \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$$

(f) Find the particular integral of differential equation :

$$(D^2 - 2D + 5)y = \sin x \quad \left[D = \frac{d}{dx} \right]$$

अवकलन समीकरण की विशेष अभिन्न (P.I.) ज्ञात करो।

$$(D^2 - 2D + 5)y = \sin x \quad \left[D = \frac{d}{dx} \right]$$

Part I
भाग-1

2.(a) Let V be the vector space consisting of all functions of the form:

$$\alpha e^{2x} \cos x + \beta e^{2x} \sin x$$

consider the following linear transformation:

$$L: V \rightarrow V:$$

$$L(f) = f' + f$$

Find the matrix representing L with respects the basis $\{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}$

(10)

2.(a) माना जाए सदिश स्पेस V में वे सारे फलनों का समावेश हो:

$$\alpha e^{2x} \cos x + \beta e^{2x} \sin x \text{ के रूप में।}$$

इस पर माना रेखीय रूपान्तरण निम्नलिखित हैं

$$L: V \rightarrow V:$$

$$L(f) = f' + f$$

ज्ञात करो आव्यूह प्रदर्शित करते हुये L पर आधारित

$$\{e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}$$

(b) Find the solution of the following system of linear equations:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4$$

(10)

निम्नलिखित रेखीय समीकरण को हल करो।

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4$$

(c) Classify the following small disturbance potential equation for compressible flows:

$$(1-M_\infty^2) \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} \right) = 0$$

निम्नलिखित विभव समीकरण को संपीड्य प्रवाह के लिये वर्गीकृत करो।

$$(1-M_\infty^2) \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} \right) = 0$$

(10)

3.(a) Solve $(x^2y^2 + y) dx + (2x^3y - x) dy = 0$

(10)

(b) Find $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{x}$

(10)

(c) Find the stationary points of $y = x^3 - 3x + 2$ and determine their nature.

(10)

(a) हल करो। $(x^2y^2 + y) dx + (2x^3y - x) dy = 0$

(b) ज्ञात करो $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{x}$

(c) $y = x^3 - 3x + 2$ के स्थिर बिंदु और उनकी प्रकृति ज्ञात करो।

4.(a) Prove that if $x > 0$, and $n > 1$ then

$$(1+x)^n > 1+nx$$

(10)

(b) Evaluate $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-3x} dx$

(12)

(c) A cylindrical jar of radius 15cm is filled with water upto a height of 25cm. 15 spherical balls of radii 2cm each are immersed in the Jar. Find the new level to which water is filled in the Jar [Take $\pi = 3$]

(8)

(a) सिद्ध करो यदि $x > 0$, और $n > 1$

(b) यदि $(1+x)^n > 1+nx$

(c) मूल्यांकन करो $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-3x} dx$

एक बेलनाकार बर्तन जिसकी त्रिज्या 15 सेमी. है। इस बर्तन में 25 सेमी. उंचाई तक पानी भरा हुआ है 15 गोलाकार गेंदे जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 2 सेमी. है वे बेलनाकार बर्तन में डुबा दी जाती है तो बताइये कि अब उस बेलनाकार बर्तन में पानी का तल क्या हो जायेगा। (दिया है $\pi = 3$)

Part II
भाग-2

5.(a) Find the equation in cylindrical coordinates for the ellipsoid $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

(15)

(b) Find the angle between the line $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ and the plane $10x+2y-11z = 3$

(15)

(a) दिये गये दीर्घवृत्ताकार समीकरण $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ को बेलनाकार निर्देशांक में लिखो।

(b) रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ और तल $10x+2y-11z = 3$ के मध्य का कोण ज्ञात करो।

6.(a) Solve the differential equation : $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$

Find the general solution to $t y'' - (t+1)y' + y = t^2$

Given that, $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = (t+1)$

From a fundamental set of solution for the homogenous differential equation.

(20)

अवकलन समीकरण $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$ को हल करो।

$t y'' - (t+1)y' + y = t^2$ के लिये सामान्य हल ज्ञात करो।

दिया है कि $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = (t+1)$ समांशी अवकलन समीकरण के लिये मूलभूत सिद्धांत के हल द्वारा।

7.(a) From the following data, examine whether input of oil and output of electricity can be said to be correlated.

| | | | | | | | |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Input of oil | 6.9 | 8.2 | 7.8 | 4.8 | 9.6 | 8.0 | 7.7 |
| output of Electricity | 1.9 | 3.5 | 6.5 | 1.3 | 5.5 | 3.5 | 2.2 |

(10)

निम्नलिखित आंकड़ों से जांच करो कि तेल के निवेश और विद्युत के उत्पादन के आपसी सहसम्बन्ध होने के लिये कहा जा सकता है।

| | | | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| तेल का निवेश : | 6.9 | 8.2 | 7.8 | 4.8 | 9.6 | 8.0 | 7.7 |
| विद्युत का उत्पादन : | 1.9 | 3.5 | 6.5 | 1.3 | 5.5 | 3.5 | 2.2 |

(b) Applying Newton's forward interpolation formula, compare the value of $\sqrt{5.5}$ given that

$\sqrt{5} = 2.236$, $\sqrt{6} = 2.449$, $\sqrt{7} = 2.646$ and $\sqrt{8} = 2.828$
correct upto three places of decimal

(10)

न्यूटन का अग्रिम प्रक्षेप सूत्र लागू करके, $\sqrt{5.5}$ के मान की तुलना करो। दिया है कि

$\sqrt{5} = 2.236$, $\sqrt{6} = 2.449$, $\sqrt{7} = 2.646$ और $\sqrt{8} = 2.828$

दशमलव के तीन स्थान तक शुद्ध।

(c) Assuming half the population of a town consumes chocolates and that 100 investigators each take 10 individuals to see whether they are consumers, how many investigators would you expect to report that three people or less were consumers?

(10)

माना एक नगर की आधी जनसंख्या ने चॉकलेट खायी और 100 जांचकर्ताओं में से प्रत्येक 10 लोगों की जांच की यह देखने के लिये कि उन्होंने चॉकलेट खाया या नहीं। तो बताओ कि कितने जांचकर्ता यह बतायेंगे कि 3 या उससे कम लोगों ने चॉकलेट खाया है।